Aufgabe 14.2

a) Entwickeln Sie die Funktion $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ an der Stelle $x_0=0$ in eine Taylorreihe!
b) Untersuchen Sie die absolute Konvergenz der Taylorreihe mit Hilfe des Quotientenkriteriums!
c) Zeigen Sie, dass die Taylorreihe in jedem Intervall $[a,b]$ mit $-1<a<b<1$ gleichmäßig konvergiert!
d) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Taylorreihe!

Lösung:

a) Taylorentwicklung: $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$

$$\begin{array}{llll}
f(x) & =(1+x)^{-1} & f(0) & =1 \\
f'(x) & =-(1+x)^{-2} & f'(0) & =-1 \\
f''(x) & =2(1+x)^{-3} & f'(0) & =2 \\
f'''(x) & =-2\cdot 3(1+x)^{-3} & f'''(0) & =-3! \\
\multicolumn{2}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} & \multicolumn{2}{l}{\dots\dots\dots\dots} \\
\multicolumn{2}{l}{f^{(k)}(x)=(-1)^k k!\,(1+x)^{-k-1}} & \multicolumn{2}{l}{f^{(k)}(0)=(-1)^k k!}
\end{array}$$

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k k!}{k!}x^k=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k=1-x+x^2-x^3\pm\dots$$

b) Reihe $\sum a_k$ konvergiert absolut, wenn $\sum|a_k|$ konvergiert

Quotientenkriterium für Konvergenz der Zahlenreihe $\sum a_k$ mit positiven Gliedern:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}\begin{cases}<1 & \text{Reihe konvergent}\\ =1 & \text{so nicht entscheidbar}\\ >1 & \text{Reihe divergent}\end{cases}$$

Für festes x ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k$ Zahlenreihe. Zur Untersuchung der absoluten Konvergenz werden die Beträge der Reihenglieder betrachtet:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}=\lim_{k\to\infty}\frac{|x^{k+1}|}{|x^k|}=\lim_{k\to\infty}|x|=|x|,$$

$$\text{d.h.:}\begin{cases}|x|<1: & \text{Reihe konvergiert absolut (und damit auch einfach)}\\ |x|=1: & \text{keine Aussage}\\ |x|>1: & \text{Reihe divergiert absolut}\end{cases}$$

Offensichtlich ist aber die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^k k!}{k!}x^k=\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k=1-x+x^2-x^3\pm\dots$ für $x=1$ unbestimmt und für $x=-1$ bestimmt divergent.

Die Reihe konvergiert absolut genau dann, wenn $|x|<1$ gilt, in diesem Falle ist sie auch einfach konvergent und es gilt $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k=\dfrac{1}{1+x}$.

c) Nach b) konvergiert die Reihe für $|x|<1$, allerdings können zu den x aus diesem Bereich unterschiedliche Konvergenzgeschwindigkeiten gehören.

Eine Funktionenreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty}f_k(x)$ konvergiert gleichmäßig über dem Intervall $[a,b]$, wenn für alle $\varepsilon > 0$ eine einheitliche (d.h. von x unabhängiges) natürliche Zahl $n_0(\varepsilon)$ exisitiert, so dass $\left|\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} f_k(x)\right| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0(\varepsilon)$, $x \in [a,b]$ gilt.

Gleichmäßige Konvergenz kann mit dem Weierstraßschen Majorantenkriterium gezeigt werden: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ konvergiert gleichmäßig, wenn eine konvergente Zahlenreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ mit $|f_k(x)| \leq a_k$ für alle k, $x \in [a,b]$ existiert („Majorante“).

Sei nun $s = \max(|a|,|b|)$. Wegen der Voraussetzung von c) gilt offensichtlich $|s| < 1$, folglich konvergiert die geometrische Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} s^k = \frac{1}{1-s}$.

Für alle $x \in [a,b]$ gilt dann $|x| < s$ und damit auch $\left|(-1)^k x^k\right| < s^k$, so dass nach dem Weierstraßschen Majorantenkriterium aus der Konvergenz von $\sum\limits_{k=0}^{\infty} s^k$ die gleichmäßige Konvergenz von $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$ für $x \in [a,b]$ folgt.

d) r heißt Konvergenzradius von $\sum c_k x^k$, wenn die Reihe für alle $|x| < r$ absolut konvergiert und für alle $|x| > r$ divergiert. Nach b) ist offensichtlich $r = 1$.

Formel für Konvergenzradius: $r = \lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{c_k}{c_{k+1}}\right| = \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}}$

(ergibt sich aus Quotienten- bzw. Wurzelkriterium)

Für die zu untersuchende Reihe sind beide Kriterien ohne Weiteres anwendbar, es ergibt sich

$$r = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{(-1)^k}{(-1)^{k+1}}\right| = \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|(-1)^k|}} = 1.$$

Allerdings ist die Konvergenz innerhalb des Konvergenzradius $x = \pm 1$ nicht gleichmäßig. Zu den Rändern zu wird sie immer langsamer.