Aufgabe 14.1

Untersuchen Sie die folgenden Funktionenreihen auf gleichmäßige Konvergenz in $\mathbb{R}$:

a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^3}$, b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+x^2}$!

Lösung:

Konvergenz der Funktionenreihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$: Wenn die Folge der Partialsummen $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$ für $n \to \infty$ konvergiert, so heißt der Grenzwert $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$ Summe der Funktionenreihe.

Nach Definition heißt das:

Konvergenz im Punkt x („**punktweise Konvergenz**“), falls für alle $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl $n_0(\varepsilon, x)$ existiert, so dass $\left| \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x) - \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x) \right| < \varepsilon$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_0(\varepsilon, x)$ gilt.

Zu verschiedenen x können dabei verschiedene $n_0(\varepsilon, x)$ gehören, d.h., die Konvergenzgeschwindigkeit kann je nach x verschieden sein.

Gleichmäßige Konvergenz, falls für alle x aus dem entsprechenden Bereich ein einheitliches $n_0(\varepsilon)$ (nicht mehr von x abhängig!) gewählt werden kann, d.h.

gleichmäßige Konvergenz über dem Intervall $[a, b]$, falls für alle $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl $n_0(\varepsilon)$ existiert, so dass $\left| \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x) - \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x) \right| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0(\varepsilon)$, $x \in [a, b]$ gilt.

Majorantenkriterium: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ konvergiert gleichmäßig, wenn eine konvergente Zahlenreihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ mit $|f_k(x)| \leq a_k$ für alle k und für alle $x \in [a, b]$ existiert („Majorante“).

Als Majoranten können bei den gegebenen Funktionenreihen Reihen der Form $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ verwendet werden. Diese konvergieren im Falle $\alpha > 1$. Davon kann man sich analog zur Vorgehensweise bei Aufgabe 13.111 überzeugen. Für $\alpha > 1$ gilt nämlich $\frac{1}{k^\alpha} < \int\limits_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$. Daraus folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} < 1 + \int\limits_{1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = 1 + \frac{1}{\alpha - 1} = \frac{\alpha}{\alpha - 1}.$$

a) $|f_k(x)| = \left| \frac{\cos kx}{k^3} \right| \leq \frac{1}{k^3}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Da $\frac{1}{k^3}$ konvergiert, konvergiert $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^3}$ nach dem Majorantenkriterium gleichmäßig über $\mathbb{R}$.

b) $|f_k(x)| = \left| \frac{1}{k^2+x^2} \right| \leq \frac{1}{k^2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Da $\frac{1}{k^2}$ konvergiert, konvergiert $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+x^2}$ nach dem Majorantenkriterium gleichmäßig über $\mathbb{R}$.