Aufgabe 13.113

Die Lebensdauer eines Bauteils in Jahren sei eine exponentialverteilte Zufallsgröße mit der Wahrscheinlichkeitsdichte $p(t)=\lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}$, $t\geq 0$ mit einem positiven Parameter λ. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Lebensdauer des Bauteils zwischen a und b Jahren beträgt, ist dann gleich $\int\limits_a^b p(t)\,\mathrm{d}t=\lambda\int\limits_a^b \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$.

a) Überzeugen Sie sich davon, dass mit der verwendeten Wahrscheinlichkeitsdichte gesichert ist, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Bauteil irgendwann ausfällt, gleich 1 ist!

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hält das Bauteil mindestens 5 Jahre, mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt es zuvor aus?

c) Berechnen Sie den Erwartungswert $E=\int\limits_0^\infty t\,p(t)\,\mathrm{d}t$ sowie die Standardabweichung $\sigma=\sqrt{\int\limits_0^\infty (t-E)^2\,p(t)\,\mathrm{d}t}$ der Lebensdauer!

Lösung:

a) $$\int_0^\infty p(t)\,\mathrm{d}t=\lambda\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t=-\mathrm{e}^{-\lambda t}\Big|_0^\infty=-\mathrm{e}^{-\infty}+1=0+1=1$$

b) Wahrscheinlichkeit für Lebensdauer von mindestens 5 Jahren:
$$\int_5^\infty p(t)\,\mathrm{d}t=\lambda\int_5^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t=-\mathrm{e}^{-\lambda t}\Big|_5^\infty=-\mathrm{e}^{-\infty}+\mathrm{e}^{-5\lambda}=\mathrm{e}^{-5\lambda}$$
Wahrscheinlichkeit für Lebensdauer von höchstens 5 Jahren:
$$\int_0^5 p(t)\,\mathrm{d}t=\lambda\int_0^5 \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t=-\mathrm{e}^{-\lambda t}\Big|_0^5=-\mathrm{e}^{-5\lambda}+1=1-\mathrm{e}^{-5\lambda}$$

c) $$\int t\,p(t)\,\mathrm{d}t=\int t\,\lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t=-\mathrm{e}^{-\lambda t}\,t+\int \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t=-t\mathrm{e}^{-\lambda t}-\frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda t}$$
$$E=\int_0^\infty t\,p(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^\infty t\,\lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t=-t\mathrm{e}^{-\lambda t}-\frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda t}\Big|_0^\infty=0+\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{\lambda}$$
Dabei ist $t\mathrm{e}^{-\lambda t}$ für $t\to\infty$ ein unbestimmter Ausdruck der Form $\infty\cdot 0$. Nach der l'Hospitalschen Regel gilt aber $\lim\limits_{t\to\infty} t\mathrm{e}^{-\lambda t}=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{t}{\mathrm{e}^{\lambda t}}=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{\lambda\mathrm{e}^{\lambda t}}=\frac{1}{\infty}=0$.
$$\int (t-E)^2\,p(t)\,\mathrm{d}t=\int\left(t-\frac{1}{\lambda}\right)^2\lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t=-\mathrm{e}^{-\lambda t}\left(t-\frac{1}{\lambda}\right)^2+2\int \mathrm{e}^{-\lambda t}\left(t-\frac{1}{\lambda}\right)\mathrm{d}t$$
$$=-\mathrm{e}^{-\lambda t}\left(t-\frac{1}{\lambda}\right)^2-\frac{2}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda t}\left(t-\frac{1}{\lambda}\right)+\frac{2}{\lambda}\int \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$$
$$=-\mathrm{e}^{-\lambda t}\left(t-\frac{1}{\lambda}\right)^2-\frac{2}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda t}\left(t-\frac{1}{\lambda}\right)-\frac{2}{\lambda^2}\mathrm{e}^{-\lambda t}$$
$$\sigma^2=\int_0^\infty (t-E)^2\,p(t)\,\mathrm{d}t=-\mathrm{e}^{-\lambda t}\left(t-\frac{1}{\lambda}\right)^2-\frac{2}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda t}\left(t-\frac{1}{\lambda}\right)-\frac{2}{\lambda^2}\mathrm{e}^{-\lambda t}\Bigg|_0^\infty=0+\frac{1}{\lambda^2}-\frac{2}{\lambda^2}+\frac{2}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}$$

Auch $t^2 e^{-\lambda t}$ ist für $t \to \infty$ ein unbestimmter Ausdruck der Form $\infty \cdot 0$. Nach der l'Hospitalschen Regel gilt auch für ihn $\lim\limits_{t\to\infty} t^2 e^{-\lambda t} = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{t^2}{e^{\lambda t}} = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{2t}{\lambda e^{\lambda t}} = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{2}{\lambda^2 e^{\lambda t}} = \frac{2}{\infty} = 0$.

Allgemein geht für $t \to \infty$ die Exponentialfunktion stärker gegen ∞ als jede Potenzfunktion.

Jedenfalls sind Erwartungswert und Standardabweichung der Exponentialverteilung gleich $\frac{1}{\lambda}$.

Ist z.B. $\lambda = 0{,}2$, so sind Erwartungswert und Standardabweichung der Lebensdauer 5 Jahre, die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Bauteil schon nach weniger als 5 Jahren ausfällt, beträgt $1 - e^{-1} \approx 63{,}2\,\%$.