Aufgabe 13.112

Es wird erwartet, dass von einem Erzeugnis, dass zum Zeitpunkt $t=0$ auf den Markt gebracht wird, pro Zeiteinheit $f(t)=12000\dfrac{\mathrm{e}^{-t/a}}{\left(2+\mathrm{e}^{-t/a}\right)^2}$ Stück verkauft werden können, wobei a ein großer positiver Parameter sei. Genauer soll angenommen werden, dass in der n-ten Zeiteinheit $f(n-0{,}5)$ Stück verkauft werden können, d.h. in der 1. Zeiteinheit $f(0{,}5)$ Stück, in der 2. Zeiteinheit $f(1{,}5)$ Stück usw.

a) Was passiert für $t \longrightarrow \infty$?
b) Wieviel Stück des Erzeugnisses können insgesamt verkauft werden?

Lösung:

a) $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = 12000 \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{-t/a}}{\left(2+\mathrm{e}^{-t/a}\right)^2} = 12000\,\dfrac{0}{2} = 0$, deshalb auch $\lim\limits_{n\to\infty} f(n-0{,}5) = 0$, d.h. Verkauf geht mit der Zeit gegen Null.

b) Insgesamt verkauft werden $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n-0{,}5)$ Stück. Es gilt $f(n-0{,}5) \approx \int\limits_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$, also

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n-0{,}5) \approx \int_0^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 12000\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t/a}}{\left(2+\mathrm{e}^{-t/a}\right)^2}\,\mathrm{d}t = -12000\,a\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}\left(2+\mathrm{e}^{-t/a}\right)}{\left(2+\mathrm{e}^{-t/a}\right)^2}\,\mathrm{d}t$$
$$= \left.\frac{12000\,a}{2+\mathrm{e}^{-t/a}}\right|_0^{\infty} = 12000\,a\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) = \frac{12000}{6}\,a = \underline{\underline{2000\,a}}$$

Es können insgesamt ungefähr $2000\,a$ Stück verkauft werden. (Tatsächlich gilt z.B. für $a=100$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n-0{,}5) = 199\,999{,}81$.)