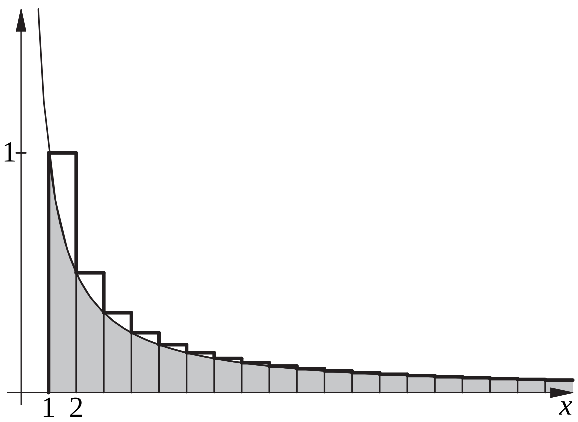
Aufgabe 13.111

a) Zeigen Sie, dass für $n \geq 1$ die Beziehung $\frac{1}{n} > \int\limits_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x}$ gilt!

b) Beweisen Sie mithilfe dieser Beziehung die Divergenz der harmonischen Reihe!

Veranschaulichen Sie die Überlegungen grafisch!

Lösung:



a) Da für $n < x < n+1$ gilt, dass $\frac{1}{n} > \frac{1}{x}$ ist, ist das Rechteck mit der Grundseitenlänge 1 und Höhe $\frac{1}{n}$ größer als die Fläche unter dem Graphen der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ zwischen $x = n$ und $x = n+1$, die von dem Integral beschrieben wird.

b) Es gilt

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n} > \int\limits_1^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln x \Big|_1^{k+1} = \ln(k+1) \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty .$$

Da das uneigentliche Integral $\int\limits_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x}$ divergiert, divergiert die harmonische Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ erst recht.