Aufgabe 13.110

Sei a ein positiver reeller Parameter und $f(x) = \dfrac{\sin ax}{\sqrt{1-\cos ax}}$.

a) Ermitteln Sie die Grenzwerte $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, sofern diese existieren!

Hinweis: Es ist zweckmäßig, zunächst $\lim\limits_{x\to 0} (f(x))^2$ zu berechnen!

b) Bestimmen Sie die Stammfunktion von $f(x)$ durch Rückführung auf Grundintegrale mittels geeigneter Substitution!

c) Berechnen Sie $\displaystyle\int\limits_0^{\pi/a} f(x)\,\mathrm{d}x$! Handelt es sich dabei um ein uneigentliches Integral?

Lösung:

a) $(f(x))^2 = \dfrac{\sin^2 ax}{1-\cos ax}$, $\dfrac{0}{0}$ für $x \to 0$

l'Hospital: $\lim\limits_{x\to 0} (f(x))^2 = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2a\sin ax\cos ax}{a\sin ax} = \lim\limits_{x\to 0} 2\cos ax = 2$

Da in der Umgebung von 0 die Funktion $\sin ax$ für $x>0$ positiv und für $x<0$ negativ ist, folgt $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = \sqrt{2}$ und $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x) = -\sqrt{2}$, so dass $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)$ nicht existiert.

b) $t = 1-\cos ax$, $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = a\sin ax$, $\sin ax\,\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{a}$

$$\int \frac{\sin ax\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-\cos ax}} = \frac{1}{a}\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = \frac{2}{a}\sqrt{t}+C = \frac{2}{a}\sqrt{1-\cos ax}+C$$

c) $$\int\limits_0^{\pi/a} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{a}\sqrt{1-\cos ax}\,\Bigg|_0^{\pi/a} = \frac{2}{a}\left(\sqrt{1-\cos\pi}-\sqrt{1-\cos 0}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{a}$$

Da weder der Integrand noch der Integrationsbereich unbeschränkt sind, handelt es sich um kein uneigentliches Integral.