Aufgabe 13.108

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche zwischen dem Grafen der Funktion $f(x)=\dfrac{x^{654320}\,\mathrm{e}^{x^{654321}}}{\mathrm{e}^{2x^{654321}}+1}$ und der x-Achse!

Lösung:

Da x eine gerade Potenz hat und die Exponentialfunktion überall positiv ist, gilt überall $f(x) \geq 0$ und damit $F = \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{654320}\,\mathrm{e}^{x^{654321}}\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2x^{654321}}+1}$.

Da $x^{654320}\,\mathrm{e}^{x^{654321}}$ bis auf einen konstanten Faktor die Ableitung von $\mathrm{e}^{x^{654321}}$ ist, empfiehlt sich die Verwendung der Substitution

$$t = \mathrm{e}^{x^{654321}}, \quad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = 654321\,x^{654320}\,\mathrm{e}^{x^{654321}}, \quad \frac{1}{654321}\,\mathrm{d}t = x^{654320}\,\mathrm{e}^{x^{654321}}\,\mathrm{d}x.$$

Wegen $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{x^{654321}} = 0, \ \lim\limits_{x\to\infty} \mathrm{e}^{x^{654321}} = \infty$ folgt schließlich

$$F = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{654320}\,\mathrm{e}^{x^{654321}}\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2x^{654321}}+1} = \frac{1}{654321}\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \frac{1}{654321}\arctan t\,\Big|_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{654321}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \underline{\underline{\frac{\pi}{1308642} \approx 2.4\cdot 10^{-6}}}.$$