Aufgabe 13.98

a) Für welche reellen x ist durch $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x-2}}$ eine reelle Funktion definiert?

b) Berechnen Sie die Stammfunktion dieser Funktion!

c) Wie müssen in $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{x-2}}$ die Grenzen a und b gewählt werden, damit es sich dabei um ein uneigentliches Integral mit endlichem Wert handelt?

d) Berechnen Sie dieses Integral in dem Fall, dass eine der beiden Integrationsgrenzen 18 ist und die andere Integrationsgrenze so gewählt wird, dass es sich um ein uneigentliches Integral mit endlichem Wert handelt!

Lösung:

a) Die Funktion ist für $x > 2$ definiert.

b) Stammfunktion von $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x-2}} = (x-2)^{-\frac{1}{4}}$ ist $F(x) = \dfrac{4}{3}(x-2)^{\frac{3}{4}} + C$.

c) Für die Stammfunktion aus b) gilt $\lim\limits_{x\to 2+0} F(x) = 0$ und $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = \infty$.

Damit es sich bei $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{x-2}}$ um ein uneigentliches Integral mit endlichem Wert handelt, muss also $a = 2$ und b endlich sein.

d) $\displaystyle\int_2^{18} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{x-2}} = \frac{4}{3}(x-2)^{\frac{3}{4}}\Big|_2^{18} = \frac{4}{3}16^{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}2^3 = \frac{4}{3}8 = \frac{32}{3}$