Aufgabe 13.97

Über einem endlichen oder unendlichen Intervall der reellen Achse wird $\int\limits_a^b \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{x-2}}$ betrachtet.

a) Für welche a und b handelt es sich dabei um
   (i) ein bestimmtes Integral,
   (ii) ein konvergentes uneigentliches Integral,
   (iii) ein bestimmt divergentes uneigentliches Integral bzw.
   (iv) ein unbestimmt divergentes uneigentliches Integral?

b) Berechnen Sie das Integral in dem Fall, dass eine der beiden Integrationsgrenzen 18 ist und die andere Integrationsgrenze so gewählt wird, dass es sich um ein konvergentes uneigentliches Integral handelt!

Lösung:

a) Wir setzen $a \le b$ voraus.

Die Funktion $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x-2}}$ ist über dem Intervall $(2,\infty)$ definiert und stetig und es gilt $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x) = \infty$. Damit es sich um ein bestimmtes oder uneigentliches Integral handelt, muss also $2 \le a$ gelten.

Stammfunktion von $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x-2}} = (x-2)^{-\frac{1}{4}}$ ist $F(x) = \frac{4}{3}(x-2)^{\frac{3}{4}} + C$.

Für diese gilt $\lim\limits_{x\to 2+0} F(x) = 0$ und $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = \infty$.

(i) Da $f(x)$ über jedem Intervall $[a,b]$ mit $2 < a \le b < \infty$ stetig und beschränkt ist, handelt es sich in diesen Fällen um ein bestimmtes Integral.

(ii) Wegen $\lim\limits_{x\to 2+0} F(x) = 0$ handelt es sich für $2 = a < b < \infty$ um ein konvergentes uneigentliches Integral.

(iii) Wegen $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = \infty$ handelt es sich für $2 \le a < b = \infty$ um ein bestimmt divergentes uneigentliches Integral.

(iv) Wegen der oben beschrieben Eigenschaften von $f(x)$ kann es sich in keinem Fall um ein unbestimmt divergentes uneigentliches Integral handeln.

b) Nach a)(ii) muss $a = 2,\ b = 18$ gewählt werden.

$$\int\limits_2^{18} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{x-2}} = \frac{4}{3}(x-2)^{\frac{3}{4}}\Big|_2^{18} = \frac{4}{3}16^{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}2^3 = \frac{4}{3}8 = \frac{32}{3}$$