Aufgabe 13.93

Berechnen Sie folgende uneigentliche Integrale, sofern diese existieren:

a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^3}$, b) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^3}$, c) $\displaystyle\int_0^\infty \cos x\,\mathrm{d}x$, d) $\displaystyle\int_{-\infty}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}$!

Lösung:

a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^3} = -\left.\frac{1}{2(x-1)^2}\right|_1^2 = -\frac{1}{2} - (-\infty) = \infty$, d.h. existiert nicht

b) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^3} = -\left.\frac{1}{2(x-1)^2}\right|_2^\infty = 0 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

c) $\displaystyle\int_0^\infty \cos x\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to\infty} \int_0^A \cos x\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to\infty} [\sin x]_0^A = \lim_{A\to\infty} (\sin A - 0) = \lim_{A\to\infty} \sin A$ divergiert unbestimmt, uneigentliches Integral existiert nicht (auch nicht im Sinne von $\pm\infty$)

d) $\displaystyle\int_{-\infty}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \arctan x|_{-\infty}^1 = \arctan 1 - \arctan(-\infty) = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$