Aufgabe 13.92

Berechnen Sie folgende uneigentliche Integrale, wobei α eine beliebige reelle Zahl sei:

a) $\int\limits_0^1 x^\alpha \,\mathrm{d}x$, b) $\int\limits_1^\infty x^\alpha \,\mathrm{d}x$, c) $\int\limits_2^{11} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-2}}$, d) $\int\limits_{-\infty}^0 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$, e) $\int\limits_0^\infty 2x\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x$!

Lösung:

a) $\alpha \neq -1: \quad \int\limits_0^1 x^\alpha \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_0^1 = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_\varepsilon^1 = \begin{cases} 1/(\alpha+1) & \alpha > -1 \\ \infty & \alpha < -1 \end{cases}$

$\alpha = -1: \quad \int\limits_0^1 x^{-1}\,\mathrm{d}x = [\ln x]_0^1 = \infty$

b) $\alpha \neq -1: \quad \int\limits_1^\infty x^\alpha \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_1^\infty = \begin{cases} \infty & \alpha > -1 \\ -1/(\alpha+1) & \alpha < -1 \end{cases} \quad , \quad \alpha = -1: \quad \int\limits_1^\infty x^{-1}\,\mathrm{d}x = \infty$

c) $\int\limits_2^{11} \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,\mathrm{d}x = \left[2\sqrt{x-2}\right]_2^{11} = 6$

d) $\int\limits_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = [\arctan x]_{-\infty}^0 = \frac{\pi}{2}$

e) $\int\limits_0^\infty 2x\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x = \left[-x\mathrm{e}^{-2x}\right]_0^\infty + \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x = \left[-\left(x+\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-2x}\right]_0^\infty = \frac{1}{2}$