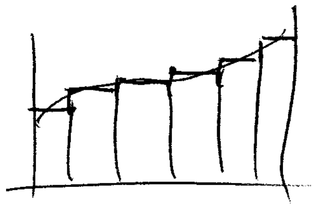
Aufgabe 13.90

Ermitteln Sie einen Näherungswert für die Zahl π durch Quadratur der Funktion $\frac{4}{1+x^2}$ über dem Intervall von 0 bis 1 nach der verallgemeinerten Rechteckregel mit 2 und mit 5 Stützstellen sowie nach der Gaußformel mit 2 und mit 3 Stützstellen!

Lösung:

Verallgemeinerte Rechteckregel: Fläche in Streifen einteilen, diese mit Rechteckregel behandeln



(vgl. Riemannsche Integralsumme, z.B. Aufgabe 13.40, oder Aufgabe 13.88)

Verallgemeinerte Rechteckregel mit 2 Teilintervallen:

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{1/2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{1/2}^1 f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{2}\,f\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}\,f\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \approx \frac{4}{2}\left(\frac{1}{1{,}0625}+\frac{1}{1{,}5625}\right) = 3{,}1623529$$

Verallgemeinerte Rechteckregel mit 5 Teilintervallen:

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{0{,}2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0{,}2}^{0{,}4} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0{,}4}^{0{,}6} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0{,}6}^{0{,}8} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0{,}8}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\approx \frac{1}{5}\left(f(0{,}1)+f(0{,}3)+f(0{,}5)+f(0{,}7)+f(0{,}9)\right)$$

$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \approx \frac{4}{5}\left(\frac{1}{1{,}01}+\frac{1}{1{,}09}+\frac{1}{1{,}25}+\frac{1}{1{,}49}+\frac{1}{1{,}81}\right) = 3{,}1449259$$

Rückführung der Gaußquadraturformel auf die bei Aufgabe 13.89 gegebenen Formeln $\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=1}^{n} A_i\,f(\widetilde{x}_i)$ für das Intervall $[-1,1]$:

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\int_0^2 f\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{x+1}{2}\right)\mathrm{d}x \approx \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} A_i\,f\left(\frac{\widetilde{x}_i+1}{2}\right)$$

Gaußquadraturformel mit 2 Stützstellen:

$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \approx \frac{4}{2}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{2}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{2}\right)^2}\right) = 3{,}1475410$$

Gaußquadraturformel mit 3 Stützstellen:

$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \approx \frac{4}{18}\left(\frac{5}{1+\left(\frac{1-\sqrt{\frac{3}{5}}}{2}\right)^2}+\frac{8}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{5}{1+\left(\frac{1+\sqrt{\frac{3}{5}}}{2}\right)^2}\right) = 3{,}1410681$$

Exakt: $\displaystyle\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 4\arctan x\Big|_0^1 = 4\left(\frac{\pi}{4}-0\right) = \pi \approx 3{,}1415927$