Aufgabe 13.89

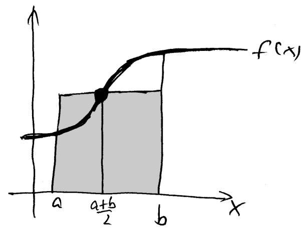
Ermitteln Sie näherungsweise $\int\limits_0^2 x^2\,\mathrm{d}x$ und $\int\limits_0^2 x^4\,\mathrm{d}x$ mit der Rechteckregel, der Trapezregel, der Simpsonregel sowie mit der Gaußformel mit 2 Stützstellen und der Gaußformel mit 3 Stützstellen!

(Die Gaußformeln mit 2 und 3 Stützstellen lauten für das Intervall $[-1,1]$:

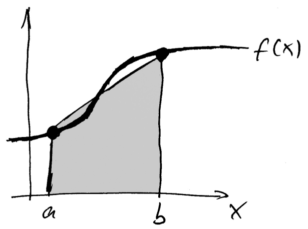
$$\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=f(-0{,}5773502692)+f(0{,}5773502692),$$

$$\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{5}{9}f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)+\frac{8}{9}f(0)+\frac{5}{9}f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)=\frac{1}{9}[5f(-0{,}7745966692)+8f(0)+5f(0{,}7745966692)].)$$

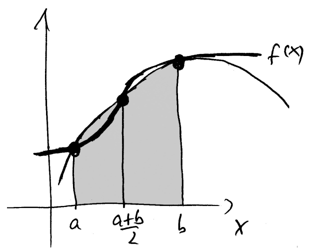
Lösung:



Rechteckregel: $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx (b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right)$



Trapezregel: $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx (b-a)\,\frac{f(a)+f(b)}{2}$



Simsonregel (Keplersche Fassregel): $f(a)$, $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$, $f(b)$ durch Parabel interpolieren: $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx (b-a)\,\frac{f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)}{6}$

Gaußformel: $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum\limits_{i=1}^{n} A_i\,f(x_i)$ Koeffizienten A_i und Stützsttlen x_i so wählen, dass Quadraturformel für Polynome $(2n-1)$-ten Grades exakt ist.

Sind die Koeffizienten und Stützstellen für ein anderes Intervall bekannt, hier: $\int\limits_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum\limits_{i=1}^{n} A_i\,f(\widetilde{x}_i)$,

so ist eine Transformation möglich, konkret: $\int\limits_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{1} f(x+1)\,\mathrm{d}x \approx \sum\limits_{i=1}^{n} A_i\,f(\widetilde{x}_i+1).$

$$
\begin{aligned}
\int_0^2 x^2\,\mathrm{d}x = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2 = \frac{8}{3} && = \mathbf{2{,}6666667} && \text{exakt}\\
\approx 2\cdot 1 && = 2{,}0000000 && \text{Rechteckregel}\\
\approx 2\cdot\frac{0+4}{2} && = 4{,}0000000 && \text{Trapezregel}\\
\approx 2\cdot\frac{0+4\cdot 1+4}{6} = \frac{8}{3} && = \mathbf{2{,}6666667} && \text{Simpsonregel, exakt,}\\
&& && \text{da Parabel integriert wird}\\
\approx \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}+1\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+1\right)^2 = 2+\frac{2}{3} = \frac{8}{3} && = \mathbf{2{,}6666667} && \text{Gauß mit 2 Stützstellen,}\\
&& && \text{exakt für Polynome 3. Grades}\\
\approx \frac{1}{9}\left(5\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}+1\right)^2+8+5\left(\sqrt{\frac{3}{5}}+1\right)^2\right) && && \\
= \frac{1}{9}\left(10+10\cdot\frac{3}{5}+8\right) = \frac{18+6}{9} = \frac{8}{3} && = \mathbf{2{,}6666667} && \text{Gauß mit 3 Stützstellen,}\\
&& && \text{exakt für Polynome 5. Grades}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^4 x^4\,\mathrm{d}x = \left.\frac{x^5}{5}\right|_0^2 = \frac{32}{5} && = \mathbf{6{,}4000000} && \text{exakt}\\
\approx 2\cdot 1 && = 2{,}0000000 && \text{Rechteckregel}\\
\approx 2\cdot\frac{0+16}{2} && = 16{,}0000000 && \text{Trapezregel}\\
\approx 2\cdot\frac{0+4\cdot 1+16}{6} = \frac{40}{6} = \frac{20}{3} && = 6{,}6666667 && \text{Simpsonregel}\\
\approx \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}+1\right)^4+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+1\right)^4 && && \\
= 2\left(1+6\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\right) = 2\left(3+\frac{1}{9}\right) = \frac{56}{9} && = 6{,}2222222 && \text{Gauß mit 2 Stützstellen,}\\
&& && \text{exakt für Polynome 3. Grades}\\
\approx \frac{1}{9}\left(5\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}+1\right)^4+8+5\left(\sqrt{\frac{3}{5}}+1\right)^4\right) && && \\
= \frac{1}{9}\left(10\left(1+6\cdot\frac{3}{5}+\frac{9}{25}\right)+8\right) && && \\
= \frac{10(25+90+9)+200}{9\cdot 25} && && \\
= \frac{1440}{9\cdot 25} = \frac{3^2\cdot 4^2\cdot 10}{3^2\cdot 5^2} = \frac{32}{5} && = \mathbf{6{,}4000000} && \text{Gauß mit 3 Stützstellen,}\\
&& && \text{exakt für Polynome 5. Grades}
\end{aligned}
$$