Aufgabe 13.87

Sei $0<a<b$. Zeigen Sie, dass die Beziehung $\dfrac{b-a}{b} \le \ln\dfrac{b}{a} \le \dfrac{b-a}{a}$ gilt!

Hinweis: Gilt für eine über $[a,b]$ mit $a<b$ Riemann–integrierbare Funktion $f(x)$ die Beziehung $m \le f(x) \le M$, so gilt $m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le M(b-a)$.

Lösung:

Sei $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

$$
\begin{aligned}
0 < a \le x \le b \quad &\Longleftrightarrow \quad 0 < \frac{1}{b} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{a} \\
&\Longrightarrow \quad \frac{b-a}{b} \le \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b \frac{dx}{x} \le \frac{b-a}{a} \\
&\Longrightarrow \quad \frac{b-a}{b} \le \ln x\Big|_a^b = \ln b - \ln a = \ln\frac{b}{a} \le \frac{b-a}{a}
\end{aligned}
$$