Aufgabe 13.86

Ein Körper werde in einer Höhe von 19,62 m über der Erdoberfläche waagerecht mit einer Geschwindigkeit von 9,81 m/s geworfen. Der Luftwiderstand wird nicht berücksichtigt.

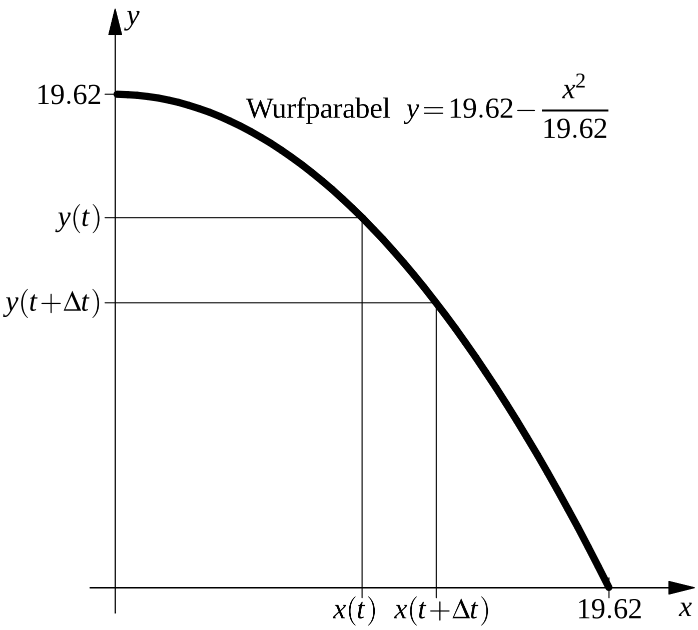
a) Nach welcher Zeit erreicht der Körper den Erdboden, wo prallt er auf diesen auf?
b) Welche Geschwindigkeit erreicht der Körper bis zum Aufprall?
c) Bestimmen Sie die Länge des Weges, den der Körper bis zu seinem Aufprall zurücklegt!

Lösung:

a) Die Bewegung kommt durch Überlagerung zweier Bewegungen zustande. Die x–Komponente ergibt sich aus dem waagerechen Wurf mit konstanter Geschwindigkeit zu $x = v_0 t = 9.81t$, die y–Komponente durch den freien Fall als gleichmäßig beschleunigte Bewegung zu $y = h_0 - \frac{g}{2}t^2 = 19.62 - 4.905t^2$.

Die Höhe 0 wird erreicht für $0 = 19.62 - 4.905t^2$, $4.905t^2 = 19.62$, $t = 2$, dann gilt $x = 9.81 \cdot 2 = 19.62$. Also prallt der Körper nach 2 s in einer horizontalen Entfernung von 19,62 m auf den Erdboden auf.

b)



In der Zeit Δt bewegt sich der Körper von $(x(t), y(t))$ nach $(x(t+\Delta t), y(t+\Delta t))$. Also gilt

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\sqrt{(x(t+\Delta t)-x(t))^2 + (y(t+\Delta t)-y(t))^2}}{\Delta t}$$
$$= \lim_{\Delta t \to 0} \sqrt{\left(\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t}\right)^2} = \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}.$$

Dabei sind v_x und v_y die Geschwindigkeiten der Änderung der x– bzw. y–Komponente,

$$v_x = \dot{x}(t) = v_0 = 9.81, \quad v_y = \dot{x}(t) = -gt = -9.81t, \quad v(t) = \sqrt{9.81^2 + (-9.81t)^2} = 9.81\sqrt{1+t^2}.$$

Wegen $v(2) = 9.81\sqrt{5} \approx 21.94$ ist zum Aufprall eine Geschwindigkeit von 21,94 m/s erreicht.

c) Ist $s(t)$ der zurückgelegte Weg in Abhängigkeit von der Zeit, so ergibt sich wegen $\dot{s}(t)=v(t)$ die insgesamt zurückgelegte Weglänge zu $s=s(2)-s(0)=\int\limits_0^2 v(t)\,\mathrm{d}t=9.81\int\limits_0^2\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

Die Stammfunktion von $\sqrt{1+t^2}$ kann besseren Formelsammlungen entnommen werden, z.B. der des Lehrbuchs der Mathematik aus Wikibooks. Dort findet sich für $r=\sqrt{x^2+a^2}$ die Stammfunktion $\int r\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\big(xr+a\ln(x+r)\big)$.
Die Rückführung auf ein Grundintegral ist durch partielle Integration möglich:

$$\int\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t=t\sqrt{1+t^2}-\int\frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t=t\sqrt{1+t^2}-\int\frac{1+t^2}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t+\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}},$$

$$\int\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left(t\sqrt{1+t^2}+\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}}\right)=\frac{1}{2}\left(t\sqrt{1+t^2}+\operatorname{Arsinh}t\right)+C$$

Ist $y=\operatorname{Arsinh}t$, so gilt $t=\sinh y=\frac{\mathrm{e}^y+\mathrm{e}^{-y}}{2}$, daraus folgt $\mathrm{e}^{2y}-1=2t\mathrm{e}^y$, $(\mathrm{e}^y)^2-2t\mathrm{e}^y-1=0$, $\mathrm{e}^y=t\pm\sqrt{t^2+1}$. Diese Beziehung kann nur mit dem $+$ erfüllt sein, da sonst e^y negativ würde.
Folglich ist $y=\operatorname{Arsinh}t=\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)$.

$$s=9.81\int\limits_0^2\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{9.81}{2}\left(t\sqrt{1+t^2}+\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\right)\Bigg|_0^2=\frac{9.81}{2}(2\sqrt{5}+\ln(2+\sqrt{5}))\approx 29.02.$$

Der Körper legt also bis zu seinem Aufprall einen Weg von $29{,}02\,\mathrm{m}$ zurück.