Aufgabe 13.82

Ein Körper entstehe durch Rotation der von der x-Achse und den Kurven $x=-\frac{1}{2}$, $x=\frac{1}{2}$ und $y=\frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}$ begrenzten Fläche um die x-Achse.

a) Geben Sie den Querschnitt des Körpers, d.h. den Flächeninhalt der Schnittfläche des Körpers mit der zur y-z-Ebene parallelen Ebene, in Abhängigkeit von x an!

b) Bestimmen Sie das Volumen des Körpers!

Lösung:

a) Die Querschnittsfläche ist ein Kreis mit dem Radius $y=\frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}$, ihr Flächeninhalt somit $A(x)=\pi\,(y(x))^2=\frac{\pi}{1+4x^2}$.

b) $$V=\int\limits_{-1/2}^{1/2} A(x)\,\mathrm{d}x=\pi\int\limits_{-1/2}^{1/2}\frac{\mathrm{d}x}{1+4x^2}=\pi\int\limits_{x=-1/2}^{x=1/2}\frac{\mathrm{d}x}{1+(2x)^2}=\pi\int\limits_{t=-1}^{t=1}\frac{\frac{\mathrm{d}t}{2}}{1+t^2}=\frac{\pi}{2}\int\limits_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\frac{\pi}{2}\arctan t\Big|_{-1}^{1}$$

$$=\frac{\pi}{2}(\arctan 1-\arctan(-1))=\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)=\frac{\pi^2}{4}$$

(Dabei ist die Substitution $t=2x$, $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=2$, $\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{2}$ verwendet worden.)