

Aufgabe 13.80

Ein 100 cm langer Stab habe eine über seine Länge variierende Dichte, diese betrage $\left(30 + \frac{\sqrt{x}(100-x)}{20}\right) \frac{\text{g}}{\text{cm}}$, $0 \leq x \leq 100$. Berechnen Sie seine Masse!

Lösung:

Da es sich um eine Massendichte pro Längeneinheit handelt, gilt bei konstanter Dichte $m = \rho l$. (Dichte muss nicht notwendig als Verhältnis von Masse und Volumen verstanden werden. Bekannt ist u.a. die Angabe von auf die Fläche bezogener Massendichte bei Papier, z.B. 80 g/m^2 . Die für die längenbezogene Massendichte nach DIN 5485 wohl empfohlenen Bezeichnungen „Massenlängendichte“ oder „Massenbelag“ (s. Wikipedia-Artikel „Dichte“) werden, wie man beim Googeln feststellt, kaum verwendet.)

Zerlegt man den Stab in kleine Teile der Länge Δx , so ergibt sich durch Grenzübergang für die Riemannschen Integralsummen als Masse des Stabes $m = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(\xi_i) \Delta x = \int_a^b \rho(x) dx$: Masse = Dichte mal Länge.

$$\begin{aligned} m &= \int_0^{100} \left(30 + \frac{\sqrt{x}(100-x)}{20}\right) dx = \int_0^{100} \left(30 + 5x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{20}x^{\frac{3}{2}}\right) dx = 30x + \frac{5 \cdot 2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{20 \cdot 5}x^{\frac{5}{2}} \Big|_0^{100} \\ &= 30 \cdot 100 + \frac{10}{3} \cdot 100 \cdot 10 - \frac{1}{50} \cdot 10000 \cdot 10 = 3000 + \frac{10000}{3} - 2000 = \frac{13000}{3} \text{ [g]} \end{aligned}$$

Somit beträgt die Masse ca. 4,33 kg.