Aufgabe 13.78

Sei $f(x) = \sqrt{2x - x^2}\,(1-x)$.

a) Für welche reellen x ist durch $f(x)$ eine reellwertige Funktion definiert?
b) Bestimmen Sie die Stammfunktion von $f(x)$ durch Rückführung auf ein Grundintegral mittels geeigneter Substitution!
c) Berechnen Sie den Flächeninhalt der über dem in a) ermittelten Definitionsbereich von der Funktion $f(x)$ und der x–Achse begrenzten Fläche!

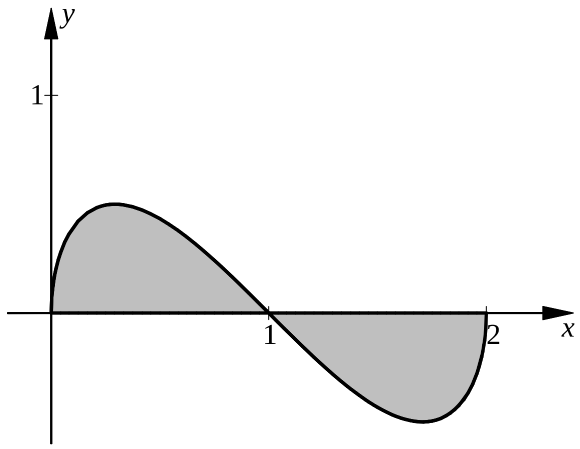
Lösung:

a) Die Funktion ist definiert, wenn die Wurzel existiert. Dies ist für $2x - x^2 = (2-x)\,x \geq 0$, d.h. $0 \leq x \leq 2$ der Fall.

b) $t = 2x - x^2, \quad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = 2 - 2x, \quad \frac{\mathrm{d}t}{2} = (1-x)\,\mathrm{d}x$

$$\int \sqrt{2x - x^2}\,(1-x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\,\frac{2}{3}\,t^{\frac{3}{2}} + C = \underline{\underline{\frac{1}{3}(2x-x^2)^{\frac{3}{2}} + C}}$$

c)



Offensichtlich gilt $f(x) = \begin{cases} \geq 0 & 0 \leq x \leq 1 \\ \leq 0 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$.

$$F = \int_0^1 \sqrt{2x - x^2}\,(1-x)\,\mathrm{d}x - \int_1^2 \sqrt{2x - x^2}\,(1-x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}(2x-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 - \left[\frac{1}{3}(2x-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_1^2$$
$$= \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$