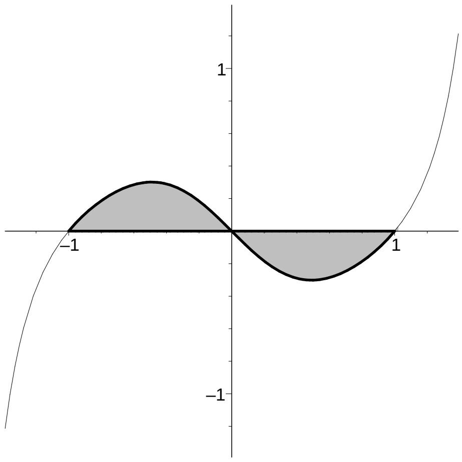
Aufgabe 13.77

Sei a ein positiver Parameter. Berechnen Sie den Inhalt der von $f(x)=\mathrm{e}^{a(x^4-2x^2)}(x^3-x)$ für $-1\le x\le 1$ und der x–Achse begrenzten Fläche!

Lösung:

Bild für $a=\dfrac{1}{2}$:



$$f(x)=\mathrm{e}^{a(x^4-2x^2)}(x^3-x)=\mathrm{e}^{a(x^4-2x^2)}(x^2-1)\,x\begin{cases}>0, & -1<x<0\\ <0, & 0<x<1\end{cases}$$

$$F=\int\limits_{-1}^{0}\mathrm{e}^{a(x^4-2x^2)}(x^3-x)\,\mathrm{d}x-\int\limits_{0}^{1}\mathrm{e}^{a(x^4-2x^2)}(x^3-x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int\mathrm{e}^{a(x^4-2x^2)}(x^3-x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4a}\int\mathrm{e}^{a(x^4-2x^2)}\,\mathrm{d}\big(a(x^4-2x^2)\big)=\frac{1}{4a}\mathrm{e}^{a(x^4-2x^2)}+C$$

$\Big($Dabei ist die Substitution $t=a(x^4-2x^2)$, $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=a\,(4x^3-4x)$, $\dfrac{\mathrm{d}t}{4a}=(x^3-x)\,\mathrm{d}x$ ausgeführt:

$$\int\mathrm{e}^{a(x^4-2x^2)}(x^3-x)\,\mathrm{d}x=\int\mathrm{e}^t\,\frac{\mathrm{d}t}{4a}=\frac{1}{4a}\int\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{4a}\mathrm{e}^t+C=\frac{1}{4a}\mathrm{e}^{a(x^4-2x^2)}+C.\Big)$$

$$F=\left[\frac{1}{4a}\mathrm{e}^{a(x^4-2x^2)}\right]_{-1}^{0}-\left[\frac{1}{4a}\mathrm{e}^{a(x^4-2x^2)}\right]_{0}^{1}=\left(\frac{1}{4a}-\frac{1}{4a}\mathrm{e}^{-a}\right)-\left(\frac{1}{4a}\mathrm{e}^{-a}-\frac{1}{4a}\right)=\underline{\underline{\frac{1-\mathrm{e}^{-a}}{2a}}}$$