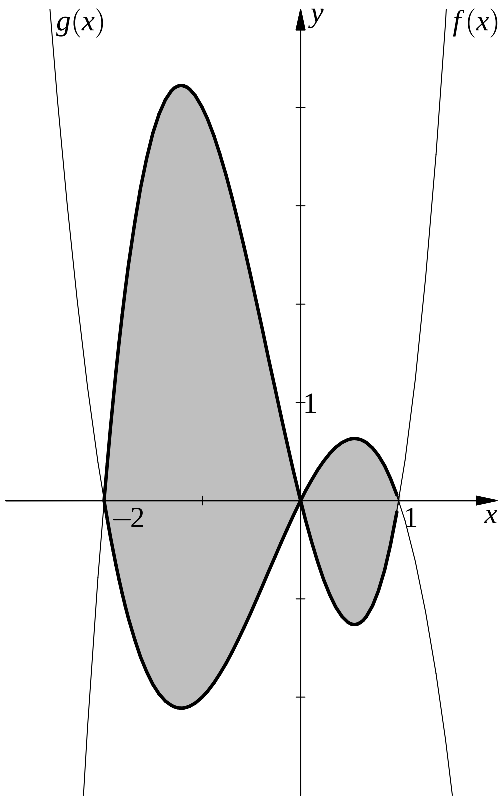
Aufgabe 13.75

Berechnen Sie den Inhalt der von den Kurven $y=2x^3+2x^2-4x$ und $y=-x^3-x^2+2x$ begrenzten endlichen Fläche!

Lösung:

Auf den rechten Seiten stehen in beiden Fällen Vielfache von $x^3+x^2-2x=x(x^2+x-2)$, folglich haben die Polynome $f(x)=2x^3+2x^2-4x$ und $g(x)=-x^3-x^2+2x$ die Nullstellen $x_1=0,\ x_{2/3}=-\frac{1}{2}+\pm\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{8}{4}}=\begin{cases}1\\-2\end{cases}$.



$$\int(2x^3+2x^2-4x)\,\mathrm{d}x=\frac{x^4}{2}+\frac{2x^3}{3}-2x^2$$

$$\int(-x^3-x^2+2x)\,\mathrm{d}x=-\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+x^2$$

$$A=\int_{-2}^{0}f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}g(x)\,\mathrm{d}x-\int_{-2}^{0}g(x)\,\mathrm{d}x-\int_{0}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\left[\frac{x^4}{2}+\frac{2x^3}{3}-2x^2\right]_{-2}^{0}+\left[-\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+x^2\right]_{0}^{1}$$

$$=-\left[-\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+x^2\right]_{-2}^{0}-\left[\frac{x^4}{2}+\frac{2x^3}{3}-2x^2\right]_{0}^{1}$$

$$=-8+\frac{16}{3}+8-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+1-4+\frac{8}{3}+4-\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+2=\underline{\underline{\frac{37}{4}}}$$