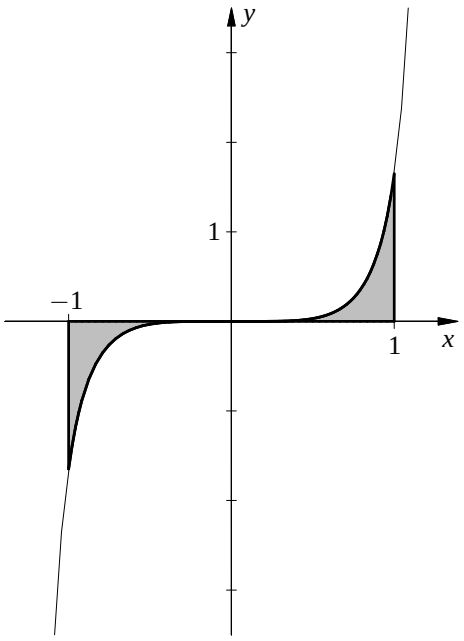
Aufgabe 13.73

Sei $a \neq 0$. Berechnen Sie den Inhalt der von den Kurven $y = x^5 \mathrm{e}^{ax^6}$, $y = 0$, $x = -1$ und $x = 1$ begrenzten Fläche!

Lösung:

Bild für $a = \dfrac{1}{2}$:



$$f(x) = x^5 \mathrm{e}^{ax^6} \begin{cases} > 0, & x > 0 \\ < 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$F = -\int_{-1}^{0} x^5 \mathrm{e}^{ax^6}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} x^5 \mathrm{e}^{ax^6}\,\mathrm{d}x$$

$$\int x^5 \mathrm{e}^{ax^6}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6a}\int \mathrm{e}^{ax^6}\,\mathrm{d}(ax^6) = \frac{1}{6a}\mathrm{e}^{ax^6} + C$$

$\Big($ Dabei ist die Substitution $t = ax^6$, $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = 6ax^5$, $\dfrac{\mathrm{d}t}{6a} = x^5\,\mathrm{d}x$ ausgeführt:

$$\int x^5 \mathrm{e}^{ax^6}\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^t \frac{\mathrm{d}t}{6a} = \frac{1}{6a}\int \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{6a}\mathrm{e}^t + C = \frac{1}{6a}\mathrm{e}^{ax^6} + C. \Big)$$

$$F = -\left[\frac{1}{6a}\mathrm{e}^{ax^6}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{1}{6a}\mathrm{e}^{ax^6}\right]_{0}^{1} = -\frac{1}{6a}(1 - \mathrm{e}^a) + \frac{1}{6a}(\mathrm{e}^a - 1) = \underline{\underline{\frac{\mathrm{e}^a - 1}{3a}}}$$