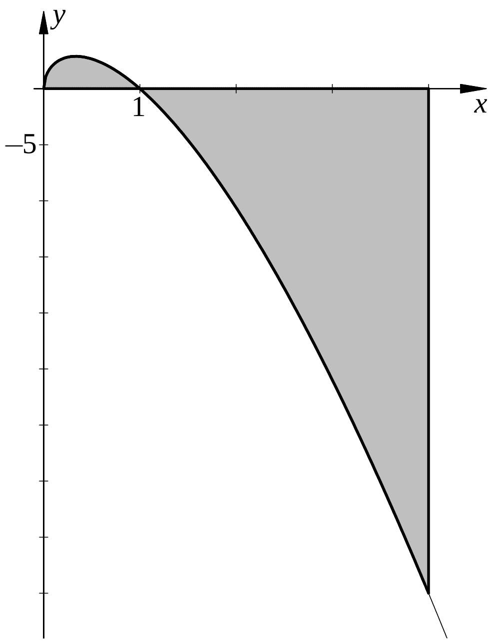
Aufgabe 13.68

Berechnen Sie den Inhalt der von $x=0,\ x=4,\ y=0$ und $y=\frac{15}{2}\sqrt{x}\,(1-x)$ begrenzten Fläche!

Lösung:

Offensichtlich ist $f(x) = \frac{15}{2}\sqrt{x}\,(1-x) \begin{cases} \geq 0, & x \leq 1 \\ \leq 0, & x \geq 1 \end{cases}$.



Folglich gilt

$$A = \frac{15}{2}\int_0^1 \sqrt{x}\,(1-x)\,\mathrm{d}x - \frac{15}{2}\int_1^4 \sqrt{x}\,(1-x)\,\mathrm{d}x = \frac{15}{2}\int_0^1 (x^{1/2}-x^{3/2})\,\mathrm{d}x + \frac{15}{2}\int_1^4 (x^{3/2}-x^{1/2})\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[\frac{15}{2}\,\frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} - \frac{15}{2}\,\frac{x^{5/2}}{\frac{5}{2}}\right]_0^1 + \left[\frac{15}{2}\,\frac{x^{5/2}}{\frac{5}{2}} - \frac{15}{2}\,\frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \left[5x^{3/2}-3x^{5/2}\right]_0^1 + \left[3x^{5/2}-5x^{3/2}\right]_1^4$$

$$= 5-3+3\cdot 4^{5/2}-5\cdot 4^{3/2}-3+5 = 2+3\cdot 32-5\cdot 8+2 = 4+96-40 = \underline{\underline{60}}.$$