Aufgabe 13.61

Berechnen Sie bestimmten Integrale a) $\int\limits_0^{\pi} x\cos 3x\,\mathrm{d}x$ und b) $\int\limits_0^1 \frac{x}{(x+1)^2(x+2)}\,\mathrm{d}x$!

Lösung:

a) partielle Integration:

$$\int\limits_0^{\pi} x\cos 3x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x\sin 3x\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{3}\int\limits_0^{\pi}\sin 3x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x\sin 3x + \frac{1}{9}\cos 3x\,\mathrm{d}x\Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{9} - \frac{1}{9} = -\frac{2}{9}$$

b) Partialbruchzerlegung:

$$\frac{x}{(x+1)^2(x+2)} = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2},\quad x = A(x+2) + B(x+1)(x+2) + C(x+1)^2,$$

$B+C=0,\ A+3B+2C=1,\ 2A+2B+C=0,\ \ A=-1,\ B=2,\ C=-2$

$$\int\limits_0^1 \frac{x}{(x+1)^2(x+2)}\,\mathrm{d}x = -\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2} + 2\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+1} - 2\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+2}$$

$$= \frac{1}{x+1} + 2\ln|x+1| - 2\ln|x+2|\Big|_0^1 = \frac{1}{x+1} + \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^2\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2} + \ln\frac{4}{9} - 1 - \ln\frac{1}{4} = \ln\frac{16}{9} - \frac{1}{2} \approx 0.0754$$