Aufgabe 13.51

Berechnen Sie das Integral $\int\limits_0^1 \sqrt[4]{1+20x-3x^2-2x^3}\,(20-6x-6x^2)\,\mathrm{d}x$!

Lösung:

Substitution $t=1+20x-3x^2-2x^3$, $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=20-6x-6x^2$, $\mathrm{d}t=(20-6x-6x^2)\,\mathrm{d}x$

$t(x)$ ist für $x\in[0,1]$ streng monton wachsend. $t'(x)=20-6x-6x^2$ hat nämlich die Nullstellen $x_{1/2}=-\dfrac{1}{2}\pm\sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{20}{6}}\approx\begin{cases}1{,}3930\\-2{,}3930\end{cases}$, so dass im Integrationsintervall $t'(x)>0$ gilt.

$$\int\limits_0^1 \sqrt[4]{1+20x-3x^2-2x^3}\,(20-6x-6x^2)\,\mathrm{d}x=\int\limits_1^{16}\sqrt[4]{t}\,\mathrm{d}t=\int\limits_1^{16}t^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}t=\frac{4}{5}t^{\frac{5}{4}}\Big|_1^{16}=\frac{4}{5}\left(16^{\frac{5}{4}}-1^{\frac{5}{4}}\right)=\frac{4}{5}(2^5-1)$$
$$=\frac{4}{5}31=\underline{\underline{\frac{124}{5}=24{,}8}}$$