Aufgabe 13.45

a) Berechnen Sie $\int\limits_{-2}^{2} (x^3 - x)\,\mathrm{d}x$!

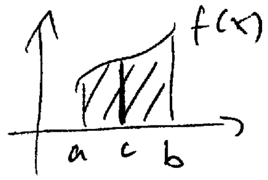
b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von $y = x^3 - x$, $x = -2$, $x = 2$ und $y = 0$ begrenzt wird!

Lösung:

Bestimmtes Integral:

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)}$$

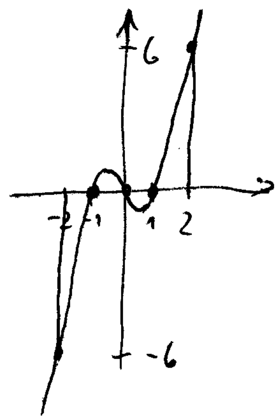
Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung, Newton–Leibniz–Formel



Fläche $A = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, $\quad \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$

a) $$\int\limits_{-2}^{2} (x^3 - x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\Bigg|_{-2}^{2} = (4-2) - (4-2) = 0$$

b) Der Flächeninhalt ist sicher nicht gleich 0.



$f(x) = x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x-1)(x+1) = 0$ für $x = 0, \pm 1$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty, \quad f(\pm 2) = \pm 6$

$$\text{Fläche} = \int\limits_{-2}^{2} |x^3 - x|\,\mathrm{d}x$$

$$= \int\limits_{-2}^{-1} (x - x^3)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{-1}^{0} (x^3 - x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{1} (x - x^3)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{1}^{2} (x^3 - x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_{-2}^{-1} + \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_{0}^{1} + \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{1}^{2}$$

$$= \frac{1}{4} - (-2) + 0 - \left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} - 0 + 2 - \left(-\frac{1}{4}\right) = 4 \cdot \frac{1}{4} + 4 = \underline{\underline{5}}$$