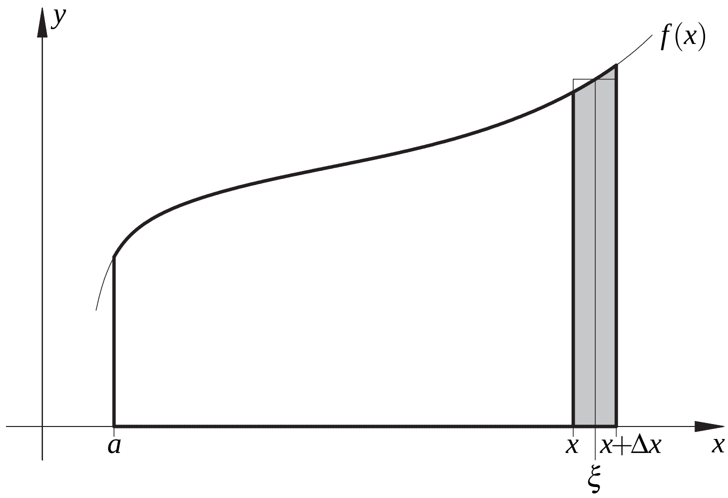
Aufgabe 13.43

Beweisen Sie ausgehend von der Definition der Ableitung durch $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}$ den **Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung**:

Ist $f(x)$ stetig und $F(x) = \int\limits_a^x f(\overline{x})\,\mathrm{d}\overline{x}$, so gilt $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = f(x)$ und $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

Lösung:



$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int\limits_a^{x+\Delta x} f(\overline{x})\,\mathrm{d}\overline{x} - \int\limits_a^{x} f(\overline{x})\,\mathrm{d}\overline{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int\limits_x^{x+\Delta x} f(\overline{x})\,\mathrm{d}\overline{x}}{\Delta x}$$

Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung (siehe Aufgabe 13.42) gilt dann

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\xi)\,(x+\Delta x - x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(\xi) = f(x),$$

wobei ξ ein jeweils von Δx abhängiger Zwischenpunkt aus dem Intervall $[x, x+\Delta x]$ ist, der jedenfalls für $\Delta x \to 0$ gegen x strebt. Damit ist die erste Formel bewiesen.

Weiterhin ist offensichtlich $F(a) = \int\limits_a^a f(\overline{x})\,\mathrm{d}\overline{x} = 0$ und damit $F(b) = \int\limits_a^b f(\overline{x})\,\mathrm{d}\overline{x} = F(b) - F(a)$, so dass auch die zweite Formel bewiesen ist.

(Die Formeln sind auch richtig, wenn als Stammfunktion $F(x) = \int\limits_a^x f(\overline{x})\,\mathrm{d}\overline{x} + C$ verwendet wird.)