

Aufgabe 13.42

Der **Mittelwertsatz der Integralrechnung** lautet: „Ist die Funktion $f(x)$ über dem Intervall $[a, b]$ stetig, so gibt es einen Zwischenpunkt $\xi \in [a, b]$, für den $\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a)$ gilt.“

Berechnen Sie für das Integral $\int_3^6 (10x - x^2 - 20) dx$ den Punkt ξ und illustrieren Sie den Sachverhalt!

Lösung:

$$\int_3^6 (10x - x^2 - 20) dx = 5x^2 - \frac{x^3}{3} - 20x \Big|_3^6 = 180 - 72 - 120 - 45 + 9 + 60 = 12 = f(\xi)(6-3) = 3f(\xi)$$

$$f(\xi) = 10\xi - \xi^2 - 20 = 4, \quad \xi^2 - 10\xi + 24 = 0, \quad \xi_{1/2} = 5 \pm \sqrt{25 - 24} = \begin{cases} 4 \\ 6 \end{cases}$$

Da beide ermittelten Punkte im Intervall $[3, 6]$ liegen, gibt es im vorliegenden Fall zwei Punkte mit der geforderten Eigenschaft: Die Fläche zwischen dem Graphen der betrachteten Funktion und der x -Achse im Intervall $[3, 6]$ ist gleich der Rechteckfläche mit der gleichen Grundseite und der Höhe $f(\xi)$.

