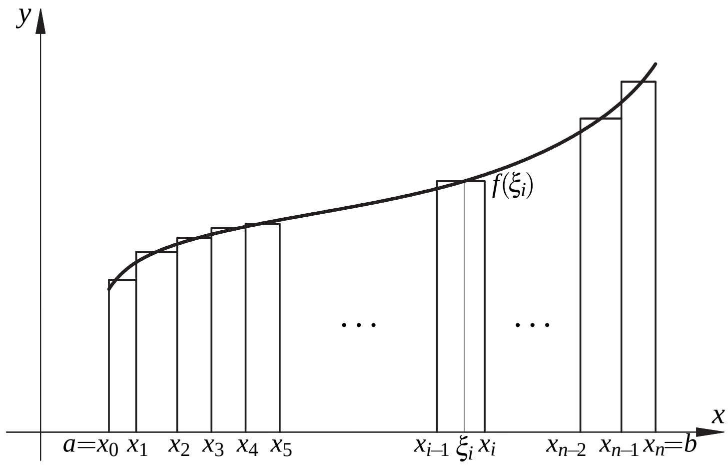
Aufgabe 13.40

Erläutern Sie den Begriff Riemannsche Integralsumme!

Lösung:

Die Riemannsche Integralsumme wird bei der Definition des bestimmten Integrals einer (beschränkten und stückweise steigen) Funktion $f(x)$ über einem Intervall $[a,b]$ eingeführt. Dazu wird das Intervall durch $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$ in n Teilintervalle zerlegt und in jedem Teilintervall ein Punkt $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ gewählt.



$\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,(x_i-x_{i-1})$ wird als eine **Riemannsche Integralsumme** von $f(x)$ über dem Intervall $[a,b]$ bezeichnet. Mit der Bezeichnung $(\Delta x)_i=x_i-x_{i-1}$ wird dann das bestimmte Integral als Grenzwert der Riemannsche Integralsummen $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \max(\Delta x)_i\to 0}} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,(\Delta x)_i$ definiert.

(Dieser Grenzwert ist unabhängig von der Wahl der Zerlegungs- und Zwischenpunkte.)

Geometrisch kann man sich dies durch Zerlegung der Fläche zwischen der x-Achse und dem Graphen der Funktion $f(x)$ im Intervall $[a,b]$ in (schmale) Streifen vorstellen, von denen jeder durch eine Rechteckfläche der Höhe $f(\xi_i)$ approximiert wird. Die Riemannsche Integralsumme ist dann die Summe dieser Rechteckflächen, bei Verfeinerung der Zerlegung ergibt sich als Grenzwert der Flächeninhalt der Fläche zwischen der x-Achse und dem Graphen der Funktion $f(x)$ im Intervall $[a,b]$.

Riemannsche Integralsummen können auch zur näherungsweisen Berechnung bestimmte Integrale genutzt werden.