Aufgabe 13.38

Sei $x>0$. Von einer Funktion $f(x)$ sei bekannt, dass ihre Funktionswerte positiv sind, $f(2)=3\mathrm{e}$ ist und ihre Elastizität $\varepsilon_f(x)=1+\dfrac{x}{2}$ beträgt. Bestimmen Sie $f(x)$!

Hinweis: Integrieren Sie $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$!

Lösung:

$$\varepsilon_f(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}x=1+\frac{x}{2},\quad \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x}+\frac{1}{2}$$

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x=\int\frac{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}}{f(x)}\,\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}f}{f}=\ln f+C\quad\Longrightarrow\quad \ln f=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x=\ln x+\frac{1}{2}x+C$$

(Wegen $f>0$ und $x>0$ müssen keine Beträge geschrieben werden.)

Anwendung der Exponentialfunktion auf beide Seiten der Gleichung liefert $f(x)=\mathrm{e}^C x\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$. C ist eine beliebige reelle Zahl, e^C ist dann eine beliebige positive Zahl, für die wieder C geschrieben werden kann. Also gilt $f(x)=Cx\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$.

Weiter gilt $f(2)=2C\mathrm{e}=3\mathrm{e}$, daraus folgt $C=\dfrac{3}{2}$ und damit $f(x)=\dfrac{3}{2}x\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$.