

Aufgabe 13.34

Berechnen Sie $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)} dx$!

Lösung:

$$\frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x-4}$$

$$2x^2+41x-91 = A(x+3)(x-4) + B(x-1)(x-4) + C(x+3)(x-4)$$

$$= A(x^2-x-12) + B(x^2-5x+4) + C(x^2+2x-3)$$

Koeffizientenvergleich: x^2 : $A + B + C = 2$
 x : $-A - 5B + 2C = 41$
 1 : $-12A + 4B - 3C = -91$

$\begin{array}{ccc c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & -5 & 2 & 41 \\ -12 & 4 & -3 & -91 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 43 \\ 0 & 16 & 9 & -67 \end{array}$	$\begin{array}{ccc c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{43}{4} \\ 0 & 0 & 21 & 105 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{43}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}$	$\begin{array}{ccc c} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}$
---	---	---

$$\frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)} = \frac{4}{x-1} - \frac{7}{x+3} + \frac{5}{x-4}$$

$$\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)} dx = 4 \int \frac{dx}{x-1} - 7 \int \frac{dx}{x+3} + 5 \int \frac{dx}{x-4}$$

$$= 4 \ln|x-1| - 7 \ln|x+3| + 5 \ln|x-4| + \ln C = \ln C \frac{(x-1)^4 |x-4|^5}{|x+3|^7}$$

Dabei ist C eine beliebige positive reelle Zahl. Dann ist nämlich $\ln C$ eine beliebige reelle Zahl.