

Aufgabe 13.33

Berechnen Sie $\int \frac{6x^2+11x-5}{x^3+4x^2-5x} dx$!

Lösung:

$$x^3+4x^2-5x=x(x^2+4x-5)=0 \text{ für } x_1=0, x_{2/3}=-2\pm\sqrt{4+5}=\begin{cases} 1 \\ -5 \end{cases}$$

$$\frac{6x^2+11x-5}{x^3+4x^2-5x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+5}$$

$$6x^2+11x-5=A(x-1)(x+5)+Bx(x+5)+Cx(x-1)=A(x^2+4x-5)+B(x^2+5x)+C(x^2-x)$$

$$x^2: \quad 6 = A + B - C \quad B + C = 6 - A = 5 \quad | +$$

$$x: \quad 11 = 4A + 5B - C \quad 5B - C = 11 - 4A = 7 \quad | + \quad 6B = 12, B = 2, C = 3$$

$$1: \quad -5 = -5A \quad A = 1$$

$$\begin{aligned} \int \frac{6x^2+11x-5}{x^3+4x^2-5x} dx &= \int \frac{dx}{x} + 2 \int \frac{dx}{x-1} + 3 \int \frac{dx}{x+5} = \ln|x| + 2\ln|x-1| + 3\ln|x+5| + \ln C \\ &= \ln \left(C|x|(x-1)^2|x+5|^3 \right) \end{aligned}$$

Dabei ist C eine beliebige positive reelle Zahl. Dann ist nämlich $\ln C$ eine beliebige reelle Zahl.