Aufgabe 13.31

Berechnen Sie durch Partialbruchzerlegung:

a) $\displaystyle\int \frac{5x-1}{x^2-x-2}\,dx$, b) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^3-2x^2}\,dx$, c) $\displaystyle\int \frac{3x^2+5x-2}{(x^2+1)(3x+1)}\,dx$!

Lösung:

Partialbruchzerlegung: gebrochen rationaler Integrand:
Nenner faktorisieren,
Integrand in Summanden mit den Faktoren als Nenner zerlegen

a) $x^2-x-2=0,\quad x_{1/2}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{8}{4}}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=\begin{cases}2\\-1\end{cases},\quad x^2-x-2=(x-2)(x+1)$

$$\frac{5x-1}{x^2-x-2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+B(x-2)}{(x-2)(x+1)}=\frac{(A+B)x+(A-2B)}{x^2-x-2}$$

$(A+B)x+(A-2B)=5x-1$: Koeffizientenvergleich:
$$\begin{array}{rrcl} x: & 5 & = & A+\ B \mid + \\ 1: & -1 & = & A-2B \mid - \\ & 6 & = & 3B \qquad B=2,\ A=5-B=3 \end{array}$$

$$\int \frac{5x-1}{x^2-x-2}\,dx=\int \frac{3}{x-2}\,dx+\int \frac{2}{x+1}\,dx=3\ln|x-2|+2\ln|x+1|+\ln C=\ln C|x-2|^3(x+1)^2$$

Dabei ist C eine beliebige positive Konstante. Ist nämlich C eine beliebige positive Zahl, so ist $\ln C$ eine beliebige reelle Zahl, vgl. die entsprechende Vorgehensweise bei der Lösung von Differenzialgleichungen z.B. bei Aufgabe 21.4c).

b) $x^3-2x=x^2(x-2)=0,\quad x_{1/2}=0$: **doppelte NS**, 2 Konstanten erforderlich, **Ansatz:** $\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}$,
$x_3=2$

$$\frac{x+2}{x^3-2x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-2}=\frac{Ax(x-2)+B(x-2)+Cx^2}{x^2(x-2)}=\frac{Ax^2-2Ax+Bx-2B+Cx^2}{x^3-2x}$$
$$=\frac{(A+C)x^2+(-2A+B)x-2B}{x^3-2x}$$

$x+2=(A+C)x^2+(-2A+B)x-2B$: Koeffizientenvergleich:
$$\begin{array}{ll} x^2: 0=A+C & \Rightarrow C=1 \\ x: 1=-2A+B & \Rightarrow A=-1 \\ 1: 2=-2B & \Rightarrow B=-1 \end{array}$$

$$\int \frac{x+2}{x^3-2x}\,dx=-\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dx}{x^2}+\int\frac{dx}{x-2}=-\ln|x|+\frac{1}{x}+\ln|x-2|+\ln C=\ln C\left|\frac{x-2}{x}\right|+\frac{1}{x}$$

c) x^2+1 hat keine reelle Nullstelle (2 **komplexe NS**, 2 Konstanten erforderlich), **Ansatz:** $\frac{Ax+B}{x^2+1}$

$$\frac{3x^2+5x-2}{(x^2+1)(3x+1)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{3x-1}=\frac{(Ax+B)(3x+1)+C(x^2+1)}{(x^2+1)(3x+1)}=\frac{3Ax^2+3Bx+Ax+B+Cx^2+C}{(x^2+1)(3x+1)}$$
$$=\frac{(3A+C)x^2+(A+3B)x+(B+C)}{(x^2+1)(3x+1)}$$

$$3x^2+5x-2=(3A+C)x^2+(A+3B)x+(B+C):\text{ Koeff.vergl.: }\begin{array}{rl} x^2: & 3=3A+C \quad |+ \\ x: & 5=A+3B \qquad |\cdot 3 \\ 1: & -2=B+C \quad |- \\ & 5=3A-B \qquad\qquad |- \\ & 15=3A+9B \qquad\quad |+ \\ & 10=10B,\ B=1, C=-3, A=2 \end{array}$$

$$\begin{aligned}\int\frac{3x^2+5x-2}{(x^2+1)(3x+1)}\,\mathrm{d}x &= \int\frac{2x+1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x-\int\frac{3}{3x+1}\,\mathrm{d}x=\int\frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x+\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}-\int\frac{3}{3x+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \int\frac{\mathrm{d}(x^2+1)}{x^2+1}+\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}-\int\frac{\mathrm{d}(3x+1)}{3x+1} \\ &= \ln(x^2+1)+\arctan x-\ln|3x+1|+\ln C=\ln C\,\frac{x^2+1}{|3x+1|}+\arctan x\end{aligned}$$

(Dabei sind die Substitutionen $t_1=x^2+1,\ \mathrm{d}t_1=2x\,\mathrm{d}x$ und $t_2=3x+1,\ \mathrm{d}t_2=3\mathrm{d}x$ ausgeführt worden.)