Aufgabe 13.30

a) Wenden Sie auf das Integral $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n}$ die Formel für die partielle Integration $\int uv'\,\mathrm{d}x = uv - \int u'v\,\mathrm{d}x$ mit $u = \frac{1}{(x^2+1)^n}$, $v = 1$ an!

b) Stellen Sie $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n}$ durch $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^{n-1}}$ dar!

c) Berechnen Sie $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^3}$!

Lösung:

a)
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n} = \frac{x}{(x^2+1)^n} + n\int \frac{2x^2}{(x^2+1)^{n+1}}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n\int \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n\int \frac{x^2+1}{(x^2+1)^{n+1}}\,\mathrm{d}x - 2n\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^{n+1}}$$
$$\Longrightarrow \quad (1-2n)\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n} = \frac{x}{(x^2+1)^n} - 2n\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^{n+1}}$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n} = \frac{1}{1-2n}\,\frac{x}{(x^2+1)^n} - \frac{2n}{1-2n}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^{n+1}}$$

b) Die bei a) aufgestellte Formel hat den Nachteil, dass die Potenz im Nenner erhöht und das Integral so verkompliziert wird. Eine Vereinfachung des Integrals lässt sich durch Auflösung der Formel nach $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^{n+1}}$ erreichen: $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^{n+1}} = \frac{1}{2n}\,\frac{x}{(x^2+1)^n} + \frac{2n-1}{2n}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n}$.

Diese Beziehung gilt für alle n, sie bleibt deshalb richtig, wenn man n durch $n-1$ ersetzt:
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n} = \frac{1}{2(n-1)}\,\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^{n-1}}.$$

So kann die Formel zur schrittweisen Berechnung von $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n}$ durch Rückführung auf $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \arctan x + C$ genutzt werden.

c)
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^3} = \frac{1}{4}\,\frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{3}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{4}\,\frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\,\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\,\frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{3}{8}\,\frac{x}{x^2+1} + \frac{3}{8}\arctan x + C$$