Aufgabe 13.29

Bestimmen Sie a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2x-8}\,\mathrm{d}x$ und b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x$!

Hinweis: Gehen Sie ggf. analog zu Aufgabe 13.28 vor!

Lösung:

a) $x^2+2x-8=0,\;\; x_{1/2}=-1\pm\sqrt{1+8}=2;-4,\;\; \dfrac{1}{x^2+2x-8}=\dfrac{1}{(x-2)(x+4)}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{x+4}$

$1=A(x+4)+B(x-2)=(A+B)x+(4A-2B)$

$$\begin{array}{ll} A+\;\;B=0 & |\cdot 2 \\ 4A-2B=1 & \quad |+ \\ 2A+2B=0 & \quad |+ \qquad 6A=1,\;\; A=\frac{1}{6},\; B=-\frac{1}{6},\;\; \frac{1}{x^2+2x-8}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+4}\right) \end{array}$$

$$\int \frac{1}{x^2+2x-8}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{6}\int\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+4}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{6}\left(\ln|x-2|-\ln|x+4|\right)+C$$

$$=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-2}{x+4}\right|+C=\ln\sqrt[6]{\left|\frac{x-2}{x+4}\right|}+\ln D=\ln\left(D\sqrt[6]{\left|\frac{x-2}{x+4}\right|}\right)$$

Dabei ist D eine beliebige positive Konstante, $C=\ln D$ damit eine beliebige reelle Zahl.

b) $x^2+2x+2=0,\;\; x_{1/2}=-1\pm\sqrt{1-2}=-1\pm\mathrm{i}$

Eine Partialbruchzerlegung nach den negativen Nullstellen wäre zwar grundsätzlich möglich, jedoch müssten dann bei der Integration auch Logarithmen aus komplexen Zahlen betrachtet werden.

Im Falle eines quadratischen Nennerpolynoms ohne reelle Nullstellen ist durch quadratische Ergänzung eine Rückführung auf das Grundintegral $\displaystyle\int\frac{1}{x^2+1}=\arctan x+C$ möglich:

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2+1}=\int\frac{\mathrm{d}(x+1)}{(x+1)^2+1}=\arctan(x+1)+C$$

(Substitution $t=x+1,\;\; \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=1,\;\; \mathrm{d}t=\mathrm{d}x,\;\; \mathrm{d}(x+1)=\mathrm{d}x$)