Aufgabe 13.28

Integrieren Sie $f(x)=\dfrac{x+29}{x^2+3x-28}$, indem Sie für die zu integrierende Funktion eine Partialbruchzerlegung nach Linearfaktoren des Nenners in der Form $\dfrac{A}{x-x_1}+\dfrac{B}{x-x_2}$ mit geeigneten Koeffizienten A und B vornehmen!

Lösung:

Partialbruchzerlegung zur Integration echt (Nennergrad $>$ Zählergrad) gebrochen-rationaler Funktionen: Faktorisierung des Nennerpolynoms nach Nullstellen und Aufspaltung der gebrochen-rationalen Funktion:

$$x^2+3x-28=0,\quad x_{1/2}=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{112}{4}}=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{121}{4}}=-\frac{3}{2}\pm\frac{11}{2}=\begin{cases}4\\-7\end{cases}$$

$$\frac{x+29}{(x-4)(x+7)}=\frac{A}{x-4}+\frac{B}{x+7},\ A \text{ und } B \text{ zu bestimmen}$$

$$\frac{x+29}{(x-4)(x+7)}=\frac{A(x+7)+B(x-4)}{(x-4)(x+7)}\quad\Longrightarrow\quad x+29=(A+B)x+(7A-4B)$$

Zwei Polynome sind genau dann gleich, wenn alle Koeffizienten übereinstimmen, daher Koeffizientenvergleich:

$$\begin{array}{lll}A+\ \ B=\ \ 1 & |\cdot 4 & \\ 7A-4B=29 & |+ & \\ 4A+4B=\ \ 4 & |+ & 11A=33,\ A=3,\ B=-2,\ \dfrac{x+29}{(x-4)(x+7)}=\dfrac{3}{x-4}-\dfrac{2}{x+7}\end{array}$$

$$\int\frac{x+29}{(x-4)(x+7)}\,\mathrm{d}x=\int\left(\frac{3}{x-4}-\frac{2}{x+7}\right)\mathrm{d}x=3\ln|x-4|-2\ln|x+7|+C=\ln\frac{|x-4|^3}{(x+7)^2}+C$$

(Die Lösung kann auch in der Form $\ln\dfrac{|x-4|^3}{(x+7)^2}+\ln D=\ln\left(D\dfrac{|x-4|^3}{(x+7)^2}\right)$ mit einer beliebigen positiven Konstante D dargestellt werden. Ist D nämlich eine beliebige positive Konstante, so ist $C=\ln D$ eine beliebige reelle Konstante. Eine solche Darstellung erweist sich im Zusammenhang mit der Lösung von Differenzialgleichungen als zweckmäßig.)