Aufgabe 13.27

Integrieren Sie $f(x)=\dfrac{9x-2}{x^2-x-6}$, indem Sie für die zu integrierende Funktion eine Partialbruchzerlegung nach Linearfaktoren des Nenners in der Form $\dfrac{A}{x-x_1}+\dfrac{B}{x-x_2}$ mit geeigneten Koeffizienten A und B vornehmen!

Lösung:

Partialbruchzerlegung zur Integration echt (Nennergrad > Zählergrad) gebrochen-rationaler Funktionen: Faktorisierung des Nennerpolynoms nach Nullstellen und Aufspaltung der gebrochen-rationalen Funktion:

$$x^2-x-6=0,\quad x_{1/2}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{24}{4}}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{1}{2}\pm\frac{5}{2}=\begin{cases}3\\-2\end{cases}$$

$$\frac{9x-2}{(x-3)(x+2)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+2},\ A \text{ und } B \text{ zu bestimmen}$$

$$\frac{9x-2}{(x-3)(x+2)}=\frac{A(x+2)+B(x-3)}{(x-3)(x+2)}\quad\Longrightarrow\quad 9x-2=(A+B)x+(2A-3B)$$

Zwei Polynome sind genau dann gleich, wenn alle Koeffizienten übereinstimmen, daher Koeffizientenvergleich:

$$\begin{array}{rl} A+\ B=\ 9 & |\cdot 3 \\ 2A-3B=-2 & |+ \\ 3A+3B=\ 27 & |+ \qquad 5A=25,\ A=5,\ B=4,\ \dfrac{9x-2}{(x-3)(x+2)}=\dfrac{5}{x-3}+\dfrac{4}{x+2} \end{array}$$

$$\int\frac{9x-2}{(x-3)(x+2)}\,\mathrm{d}x=\int\left(\frac{5}{x-3}+\frac{4}{x+2}\right)\mathrm{d}x=5\ln|x-3|+4\ln|x+2|+C=\ln\left(|x-3|^5\,(x+2)^4\right)+C$$

(Die Lösung kann auch in der Form $\ln\left(|x-3|^5\,(x+2)^4\right)+\ln D=\ln\left(D\,|x-3|^5\,(x+2)^4\right)$ mit einer beliebigen positiven Konstante D dargestellt werden. Ist D nämlich eine beliebige positive Konstante, so ist $C=\ln D$ eine beliebige reelle Konstante. Eine solche Darstellung erweist sich im Zusammenhang mit der Lösung von Differenzialgleichungen als zweckmäßig.)