Aufgabe 13.26

Berechnen Sie die Stammfunktionen von a) $f(x)=\frac{1}{x^2+25}$ und b) $f(x)=\frac{1}{x^2-25}$!

Nehmen Sie dafür im Falle b) eine „Partialbruchzerlegung“ vor, d.h., bestimmen Sie Konstanten A und B so, dass $\frac{1}{x^2-25}=\frac{1}{(x-5)(x+5)}=\frac{A}{x-5}+\frac{B}{x+5}$ gilt!

Überprüfen Sie in beiden Fällen Ihre Ergebnisse durch eine Probe!

Lösung:

a) $$\int\frac{1}{x^2+25}=\frac{1}{25}\int\frac{1}{\frac{x^2}{25}+1}=\frac{1}{25}\int\frac{\mathrm{d}x}{\left(\frac{x}{5}\right)^2+1}=\frac{1}{25}\int\frac{5\mathrm{d}t}{t^2+1}=\frac{1}{5}\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}=\frac{1}{5}\arctan t+C=\frac{1}{5}\arctan\frac{x}{5}+C$$

Dabei ist die Substitution $t=\frac{x}{5},\ x=5t,\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=5,\ \mathrm{d}x=5\mathrm{d}t$ verwendet worden.

Probe: $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{5}\arctan\frac{x}{5}=\frac{1}{25}\frac{1}{\left(\frac{x}{5}\right)^2+1}=\frac{1}{25}\frac{1}{\frac{x^2}{25}+1}=\frac{1}{x^2+25}$$

b) $$\frac{A}{x-5}+\frac{B}{x+5}=\frac{A(x+5)+B(x-5)}{(x-5)(x+5)}=\frac{(A+B)x+(5A-5B)}{x^2-25}=\frac{1}{x^2-25}$$

Für alle x muss also $(A+B)x+(5A-5B)=1$ sein. Die Polynome können nur gleich sein, wenn ihre Koeffizienten übereinstimmen („Koeffizientenvergleich“):

$$\begin{array}{lll}
A+\ B=0 & & |\cdot 5\\
5A-5B=1 & & |+\\
5A+5B=5 & & |+\\
10A\quad\ =1 & & \\
A\quad\ =\frac{1}{10}, & B=-\frac{1}{10} &
\end{array}$$

$$\int\frac{1}{x^2-25}=\frac{1}{10}\int\frac{\mathrm{d}x}{x-5}-\frac{1}{10}\int\frac{\mathrm{d}x}{x+5}=\frac{1}{10}\left(\ln|x-5|-\ln|x+5|\right)+C=\frac{1}{10}\ln\left|\frac{x-5}{x+5}\right|+C$$

Probe: $$\frac{\mathrm{d}\ln|x|}{\mathrm{d}x}=\begin{cases}\frac{\mathrm{d}\ln x}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x}, & x>0\\ \frac{\mathrm{d}\ln(-x)}{\mathrm{d}x}=\frac{-1}{-x}=\frac{1}{x}, & x<0\end{cases}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{10}\ln\left|\frac{x-5}{x+5}\right|=\frac{1}{10}\frac{x+5}{x-5}\frac{x+5-(x-5)}{(x+5)^2}=\frac{1}{10}\frac{10}{(x-5)(x+5)}=\frac{1}{x^2-25}$$