Aufgabe 13.22

Berechnen Sie folgende unbestimmte Integrale:

a) $\int \left(2\mathrm{e}^{-3x} + 4\cos 5x + 1\right)\,\mathrm{d}x$, b) $\int (9x^2+2x+5)\sqrt[5]{3x^3+x^2+5x+8}\,\mathrm{d}x$,

c) $\int \frac{1}{x^2+36}\,\mathrm{d}x$, d) $\int \frac{1}{x^2+2x+37}\,\mathrm{d}x$,

e) $\int \frac{\mathrm{e}^x+\cos x}{\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x$, f) $\int (x+5)\ln x\,\mathrm{d}x$!

Lösung:

a)
$$\int \left(2\mathrm{e}^{-3x}+4\cos 5x+1\right)\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{3}\int \mathrm{e}^{-3x}\,\mathrm{d}(-3x) + \frac{4}{5}\int \cos 5x\,\mathrm{d}5x + \int \mathrm{d}x$$
$$= -\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-3x} + \frac{4}{5}\sin 5x + x + C$$

b)
$$\int \sqrt[5]{3x^3+x^2+5x+8}\,(9x^2+2x+5)\,\mathrm{d}x = \int \sqrt[5]{3x^3+x^2+5x+8}\,\mathrm{d}(3x^3+x^2+5x+8)$$
$$= \frac{5}{6}(3x^3+x^2+5x+8)^{(6/5)} + C$$

c)
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+36} = \frac{1}{36}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(\frac{x}{6}\right)^2+1} = \frac{6}{36}\int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{x}{6}\right)}{\left(\frac{x}{6}\right)^2+1} = \frac{1}{6}\arctan\frac{x}{6} + C$$

d)
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+37} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2+36} = \frac{1}{36}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(\frac{x+1}{6}\right)^2+1} = \frac{6}{36}\int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{x+1}{6}\right)}{\left(\frac{x+1}{6}\right)^2+1} = \frac{1}{6}\arctan\frac{x+1}{6} + C$$

e)
$$\int \frac{\mathrm{e}^x+\cos x}{\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x = \int (\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-2x}\cos x)\,\mathrm{d}x,$$
$$\int \mathrm{e}^{-2x}\cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-2x}\sin x + 2\int \mathrm{e}^{-2x}\sin x\,\mathrm{d}x$$
$$= \mathrm{e}^{-2x}\sin x + 2\left(-\mathrm{e}^{-2x}\cos x - 2\int \mathrm{e}^{-2x}\cos x\,\mathrm{d}x\right)$$
$$= \mathrm{e}^{-2x}\sin x - 2\mathrm{e}^{-2x}\cos x - 4\int \mathrm{e}^{-2x}\cos x\,\mathrm{d}x,$$
$$5\int \mathrm{e}^{-2x}\cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-2x}\sin x - 2\mathrm{e}^{-2x}\cos x + \widetilde{C},$$
$$\int \frac{\mathrm{e}^x+\cos x}{\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{5}\mathrm{e}^{-2x}\sin x - \frac{2}{5}\mathrm{e}^{-2x}\cos x + C$$

f)
$$\int (x+5)\ln x\,\mathrm{d}x = \frac{(x+5)^2}{2}\ln x - \int \frac{(x+5)^2}{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{(x+5)^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int \left(x+10+\frac{25}{x}\right)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}\left((x+5)^2\ln x - \frac{x^2}{2} - 10x - 25\ln x\right) + C = \left(\frac{x^2}{2}+5x\right)\ln x - \frac{x^2}{4} - 5x + C$$

Bemerkung: Für $\int \frac{\mathrm{d}x}{x}$ braucht hier nicht $\ln|x|$ geschrieben werden, da ohnehin $x > 0$ sein muss, damit der Integrand existiert.