Aufgabe 13.21

Berechnen Sie folgende unbestimmte Integrale:

a) $\int \left(6\sin(4-3x)+3\mathrm{e}^{-2x}+5\right)\,\mathrm{d}x$, b) $\int \sqrt[3]{\mathrm{e}^{2x}+x^8}\,(\mathrm{e}^{2x}+4x^7)\,\mathrm{d}x$,

c) $\int \frac{1}{x^2+49}\,\mathrm{d}x$, d) $\int \frac{1}{x^2+2x+50}\,\mathrm{d}x$,

e) $\int \mathrm{e}^x\cos 3x\,\mathrm{d}x$, f) $\int \left(\mathrm{e}^{2x}-1\right)^4\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$!

Hinweis zu e): Führen Sie $\int \mathrm{e}^x\cos 3x\,\mathrm{d}x$ zunächst durch partielle Integration auf $\int \mathrm{e}^x\sin 3x\,\mathrm{d}x$ und letzteres Integral wieder auf $\int \mathrm{e}^x\cos 3x\,\mathrm{d}x$ zurück!

Lösung:

a)
$$\int\left(6\sin(4-3x)+3\mathrm{e}^{-2x}+5\right)\,\mathrm{d}x=-\frac{6}{3}\int\sin(4-3x)\,\mathrm{d}(4-3x)-\frac{3}{2}\int\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}(-2x)+5\int\mathrm{d}x$$
$$=2\cos(4-3x)-\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-2x}+5x+C$$

(Dabei sind die Substitutionen $t=4-3x,\ \mathrm{d}t=-3\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}x=-\frac{\mathrm{d}t}{3}$ und $u=-2x,\ \mathrm{d}u=-2\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}x=-\frac{\mathrm{d}u}{2}$ ausgeführt.)

b)
$$\int \sqrt[3]{\mathrm{e}^{2x}+x^8}\,(\mathrm{e}^{2x}+4x^7)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int \sqrt[3]{\mathrm{e}^{2x}+x^8}\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^{2x}+x^8)=\frac{3}{8}(\mathrm{e}^{2x}+x^8)^{\frac{4}{3}}+C$$

(Dabei ist die Substitution $t=\mathrm{e}^{2x}+x^8,\ \mathrm{d}t=(2\mathrm{e}^{2x}+8x^7)\,\mathrm{d}x,\ (\mathrm{e}^{2x}+4x^7)\,\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{2}$ ausgeführt.)

c)
$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+49}=\frac{1}{49}\int\frac{\mathrm{d}x}{\left(\frac{x}{7}\right)^2+1}=\frac{7}{49}\int\frac{\mathrm{d}\left(\frac{x}{7}\right)}{\left(\frac{x}{7}\right)^2+1}=\frac{1}{7}\arctan\frac{x}{7}+C$$

(Dabei ist die Substitution $t=\frac{x}{7},\ \mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}x}{7},\ \mathrm{d}x=7\mathrm{d}t$ ausgeführt.)

d)
$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+50}=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2+49}=\frac{1}{49}\int\frac{\mathrm{d}x}{\left(\frac{x+1}{7}\right)^2+1}=\frac{7}{49}\int\frac{\mathrm{d}\left(\frac{x+1}{7}\right)}{\left(\frac{x+1}{7}\right)^2+1}$$
$$=\frac{1}{7}\arctan\frac{x+1}{7}+C$$

(Dabei ist die Substitution $t=\frac{x+1}{7},\ \mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}x}{7},\ \mathrm{d}x=7\mathrm{d}t$ ausgeführt.)

e) partielle Integration:
$$\int\mathrm{e}^x\cos 3x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\mathrm{e}^x\sin 3x-\frac{1}{3}\int\mathrm{e}^x\sin 3x\,\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{3}\mathrm{e}^x\sin 3x-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\mathrm{e}^x\cos 3x+\frac{1}{3}\int\mathrm{e}^x\cos 3x\,\mathrm{d}x\right)$$
$$=\frac{1}{3}\mathrm{e}^x\sin 3x+\frac{1}{9}\mathrm{e}^x\cos 3x-\frac{1}{9}\int\mathrm{e}^x\cos 3x\,\mathrm{d}x,$$
$$\frac{10}{9}\int\mathrm{e}^x\cos 3x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\mathrm{e}^x\sin 3x+\frac{1}{9}\mathrm{e}^x\cos 3x+\widetilde{C},$$
$$\int\mathrm{e}^x\cos 3x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{10}\mathrm{e}^x\,(3\sin 3x+\cos 3x)+C$$

f) $\int \left(\mathrm{e}^{2x}-1\right)^4 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \int \left(\mathrm{e}^{2x}-1\right)^4 \frac{1}{2}\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^{2x}-1) = \frac{1}{10}\left(\mathrm{e}^{2x}-1\right)^5 + C$

(Dabei ist die Substitution $t=\mathrm{e}^{2x}-1,\ \mathrm{d}t=2\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x,\ \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{2}$ ausgeführt.)