Aufgabe 13.20

Berechnen Sie folgende unbestimmte Integrale:

a) $\displaystyle\int\left(\frac{2}{3x+4}+5\cos(6-7x)+8\right)\mathrm{d}x$, b) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{a(x^4+\sin x+\cos x)}(4x^3+\cos x-\sin x)\,\mathrm{d}x \quad (a\neq 0)$,

c) $\displaystyle\int\frac{1}{2x^2+\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$, d) $\displaystyle\int\frac{1}{x^2+10x+26}\,\mathrm{d}x$,

e) $\displaystyle\int(a\sin cx+b)\,\mathrm{e}^{\sin cx}\cos cx\,\mathrm{d}x \quad (c\neq 0)$, f) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^{2ax}}$!

Lösung:

a) $$\int\left(\frac{2}{3x+4}+5\cos(6-7x)+8\right)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\int\frac{\mathrm{d}(3x+4)}{3x+4}-\frac{5}{7}\int\cos(6-7x)\,\mathrm{d}(6-7x)+8\int\mathrm{d}x$$
$$=\frac{2}{3}\ln|3x+4|-\frac{5}{7}\sin(6-7x)+8x+C=\frac{2}{3}\ln|3x+4|+\frac{5}{7}\sin(7x-6)+8x+C$$

b) Vom Faktor a abgesehen ist $(4x^3+\cos x-\sin x)$ die Ableitung des Exponenten. Deshalb empfiehlt sich die Verwendung der Substitution $t=a(x^4+\sin x+\cos x)$, für diese ergibt sich
$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=a(4x^3+\cos x-\sin x),\quad (4x^3+\cos x-\sin x)\,\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{a}=\frac{\mathrm{d}[a(x^4+\sin x+\cos x)]}{a}\quad\text{und damit}$$
$$\int\mathrm{e}^{a(x^4+\sin x+\cos x)}(4x^3+\cos x-\sin x)\,\mathrm{d}x=\int\mathrm{e}^t\,\frac{\mathrm{d}t}{a}=\frac{1}{a}\int\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{e}^t}{a}+C=\frac{1}{a}\mathrm{e}^{a(x^4+\sin x+\cos x)}+C.$$

c) $$\int\frac{\mathrm{d}x}{2x^2+\frac{1}{2}}=2\int\frac{\mathrm{d}x}{4x^2+1}=2\int\frac{\mathrm{d}x}{(2x)^2+1}=\int\frac{2\,\mathrm{d}x}{(2x)^2+1}=\int\frac{\mathrm{d}(2x)}{(2x)^2+1}=\arctan 2x+C$$

(Dabei ist die Substitution $t=2x$, $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=2$, $2\mathrm{d}x=\mathrm{d}t=\mathrm{d}(2x)$ verwendet worden.)

d) $$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+10x+26}=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+5)^2+1}=\int\frac{\mathrm{d}(x+5)}{(x+5)^2+1}=\arctan(x+5)+C$$

(Dabei ist die Substitution $t=x+5$, $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=1$, $\mathrm{d}x=\mathrm{d}t=\mathrm{d}(x+5)$ verwendet worden.)

e) Wegen $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\dfrac{\mathrm{e}^{\sin cx}}{c}=\mathrm{e}^{\sin cx}\cos cx$ empfiehlt sich partielle Integration mit $v'=\mathrm{e}^{\sin cx}\cos cx$:
$$\int(a\sin cx+b)\,\mathrm{e}^{\sin cx}\cos cx\,\mathrm{d}x=(a\sin cx+b)\frac{\mathrm{e}^{\sin cx}}{c}-\int ac\cos cx\frac{\mathrm{e}^{\sin cx}}{c}\,\mathrm{d}x$$
$$=(a\sin cx+b)\frac{\mathrm{e}^{\sin cx}}{c}-a\frac{\mathrm{e}^{\sin cx}}{c}+C=\frac{a\sin cx+b-a}{c}\mathrm{e}^{\sin cx}+C.$$

f) Für $a\neq 0$ empfiehlt sich die Verwendung der Substitution $t=\mathrm{e}^{ax}$, $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=a\mathrm{e}^{ax}$, $\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{d}t}{a}=\dfrac{\mathrm{e}^{ax}}{a}$:
$$\int\frac{\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^{2ax}}=\frac{1}{a}\int\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\frac{1}{a}\arctan t+C=\frac{1}{a}\arctan\mathrm{e}^{ax}+C.$$

Der Fall $a=0$ ist hier nicht ausgeschlossen, für diesen ergibt sich $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{2}=\frac{x}{2}+C$.