Aufgabe 13.18

Bestimmen Sie mittels Integration durch Substitution bzw. partieller Integration

a) $\displaystyle\int \sin x\, e^{\cos x}\, dx$, b) $\displaystyle\int \frac{\cos\sqrt{y}}{\sqrt{y}}\, dy$, c) $\displaystyle\int \frac{dz}{\cos^2 z\,\sqrt{1+\tan z}}$,

d) $\displaystyle\int x\cos x\, dx$, e) $\displaystyle\int (ax^2+bx+c)\sin x\, dx$, f) $\displaystyle\int x^2 \ln x\, dx$!

Lösung:

a) Beispiel enthält Funktion $t(x)=\cos x$ und ihre Ableitung $t'(x)=-\sin x$ $\longrightarrow$ $\left\{\begin{array}{ll} \text{Substitution} & t=\cos x \\ & \dfrac{dt}{dx}=-\sin x \end{array}\right.$

$$\int e^{\cos x}\sin x\, dx = -\int e^t \frac{dt}{dx}\, dx = -\int e^t\, dt = -e^t + C = -e^{\cos x}+C$$

Man kann auch schreiben: $\begin{aligned} dt &= -\sin x\, dx, \\ d\cos x &= -\sin x\, dx. \end{aligned}$

Dann ist das gerade Notierte gleichbedeutend mit

$$\int e^{\cos x}\sin x\, dx = -\int \underset{\substack{\uparrow \\ \text{d.h } e^t\,dt}}{e^{\cos x}\, d\cos x} = -e^{\cos x}+C.$$

d.h $e^t\, dt$, also Substitution nur gedanklich ausgeführt

b) Beispiel enthält Funktion $\sqrt{y}$ und (bis auf einen konstanten Faktor) ihre Ableitung $\dfrac{1}{2\sqrt{y}}$,

deshalb Substitution $t=\sqrt{y}$, $\dfrac{dt}{dy}=\dfrac{1}{2\sqrt{y}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{y}}=2\dfrac{dt}{dy}$:

$$\int \frac{\cos\sqrt{y}}{\sqrt{y}}\, dy = \int \cos t\; 2\frac{dt}{dy}\, dy = 2\int \cos t\, dt = 2\sin t + C = 2\sin\sqrt{y}+C$$

Man kann auch schreiben: $\displaystyle\int \cos\sqrt{y}\,\frac{dy}{\sqrt{y}} = \int \cos\sqrt{y}\; 2d\sqrt{y} = 2\sin\sqrt{y}+C$

c) Beispiel enthält Funktion $1+\tan z$ und ihre Ableitung $\dfrac{1}{\cos^2 z}$,

deshalb Substitution $t=1+\tan z$, $\dfrac{dt}{dz}=\dfrac{1}{\cos^2 z}$:

$$\int \frac{dz}{\cos^2 z\,\sqrt{1+\tan z}} = \int \frac{dt}{dz}\,\frac{dz}{\sqrt{t}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int t^{-\frac{1}{2}}\, dt = 2\sqrt{t}+C = 2\sqrt{1+\tan z}+C$$

Man kann auch schreiben: $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+\tan z}}\,\frac{dz}{\cos^2 z} = \int (1+\tan z)^{-\frac{1}{2}}\, d(1+\tan z) = 2\sqrt{1+\tan z}+C$

d) Partielle Integration: $\displaystyle\int uv'\, dx = uv - \int u'v\, dx$

Bei der partiellen Integration wird u differenziert, v' integriert. Damit das Integral auf der rechten Seite einfacher wird, müssen u und v' so gewählt werden, dass sich möglichst u beim Differenzieren vereinfacht und v' leicht integrieren lässt.

$\begin{array}{ll} u=x & v'=\cos x \\ u'=1 & v=\sin x \end{array}$ $\displaystyle\int x\cos x\, dx = x\sin x - \int \sin x\, dx = x\sin x + \cos x + C$

e) $$\begin{aligned}\int \underset{u}{(ax^2+bx+c)}\ \underset{v'}{\sin x}\ \mathrm{d}x &= -(ax^2+bx+c)\cos x + \int \underset{u}{(2ax+b)}\ \underset{v'}{\cos x}\ \mathrm{d}x \\ &= -(ax^2+bx+c)\cos x + (2ax+b)\sin x - 2a\int \sin x\,\mathrm{d}x \\ &= -(ax^2+bx+c)\cos x + (2ax+b)\sin x + 2a\cos x \\ &= (-ax^2-bx+2a-c)\cos x + (2ax+b)\sin x\end{aligned}$$

f) Der Faktor x^2 vereinfacht sich zwar beim Differenzieren, $\ln x$ lässt sich aber nicht einfach integrieren. Durch Differenzieren wird aber der Logarithmus beseitigt. Deshalb wählt man $u=\ln x,\ u'=\frac{1}{x},\ v'=x^2,\ v=\frac{x^3}{3}$:

$$\int x^2 \ln x\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3x}\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C = \frac{x^3}{3}\left(\ln x - \frac{1}{3}\right) + C$$