Aufgabe 13.17

Ermitteln Sie $\int \sin^4 x\,\mathrm{d}x$ durch Rückführung auf Grundintegrale mittels partieller Integration mit $u = \sin^3 x,\ v' = \sin x$!

Hinweis: Nutzen Sie ggf. die Beziehung $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ und behandeln Sie $\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x$ auf analoge Weise!

Lösung:

$$\int \sin^4 x\,\mathrm{d}x = -\sin^3 x\cos x + 3\int \sin^2 x\cos^2 x\,\mathrm{d}x = -\sin^3 x\cos x + 3\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x - 3\int \sin^4 x\,\mathrm{d}x$$

$$\Longrightarrow \quad \int \sin^4 x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\sin^3 x\cos x + \frac{3}{4}\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x,$$

$$\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x = -\sin x\cos x + \int \cos^2 x\,\mathrm{d}x = -\sin x\cos x + \int \mathrm{d}x - \int \sin^2\,\mathrm{d}x$$

$$\Longrightarrow \quad \int \sin^2 x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\sin x\cos x + \frac{1}{2}\int \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\sin x\cos x + \frac{1}{2}x + \widetilde{C},$$

$$\int \sin^4 x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{4}\sin^3 x\cos x + \frac{3}{4}\left[-\frac{1}{2}\sin x\cos x + \frac{1}{2}x + \widetilde{C}\right]$$

$$= \frac{3}{8}x - \frac{3}{8}\sin x\cos x - \frac{1}{4}\sin^3 x\cos x + C$$