Aufgabe 13.10

Berechnen Sie folgende unbestimmte Integrale durch Substitution:

a) $\int (e^{-x}+e^{-2x})\,dx$, b) $\int (2\sin 3x + 3\cos 4x)\,dx$, c) $\int \sqrt[7]{6x+5}\,dx$,

d) $\int \frac{(\ln x^3)^2}{x}\,dx$, e) $\int \frac{x}{1+x^4}\,dx$, f) $\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+5}\,dx$, g) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^2 x+3}}\,dx$,

h) $\int e^{x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}(5x^4+4x^3+3x^2+2x+1)\,dx$, i) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}\,dx$!

Hinweis: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{Arsinh} x + C = \ln(x+\sqrt{x^2+1}) + C$

Lösung:

a) $\int e^{-x}dx + \int e^{-2x}dx = -\int e^{-x}d(-x) - \frac{1}{2}\int e^{-2x}d(-2x) = -e^{-x} - \frac{1}{2}e^{-2x} + C$

(Dabei sind die Substitutionen $t=-x,\ \frac{dt}{dx}=-1,\ dx=-dt$ und $t=-2x,\ \frac{dt}{dx}=-2,\ dx=-\frac{1}{2}dt$ verwendet worden.)

b) $\int (2\sin 3x+3\cos 4x)\,dx = \frac{2}{3}\int \sin 3x\,d3x + \frac{3}{4}\int \cos 4x\,d4x = -\frac{2}{3}\cos 3x + \frac{3}{4}\sin 4x + C$

(Dabei sind die Substitutionen $t=3x,\ \frac{dt}{dx}=3,\ dx=\frac{1}{3}dt$ und $t=4x,\ \frac{dt}{dx}=4,\ dx=\frac{1}{4}dt$ verwendet worden.)

c) $\int \sqrt[7]{6x+5}\,dx = \frac{1}{6}\int (6x+5)^{\frac{1}{7}}d(6x+5) = \frac{1}{6}\frac{7}{8}(6x+5)^{\frac{8}{7}} + C = \frac{7}{48}(6x+5)\sqrt[7]{6x+5} + C$

(Dabei ist die Substitution $t=6x+5,\ \frac{dt}{dx}=6,\ dx=\frac{1}{6}dt=\frac{1}{6}d(6x+5)$ verwendet worden.)

d) $\int \frac{(\ln x^3)^2}{x}dx = \int (3\ln x)^2\frac{dx}{x} = 9\int (\ln x)^2 d\ln x = 9\frac{1}{3}(\ln x)^3 + C = 3(\ln x)^3 + C$

(Dabei ist die Substitution $t=\ln x,\ \frac{dt}{dx}=\frac{1}{x},\ \frac{dx}{x}=dt=d\ln x$ verwendet worden.)

e) $\int \frac{x}{1+x^4}dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{1+(x^2)^2} = \frac{1}{2}\arctan x^2 + C$

(Dabei ist die Substitution $t=x^2,\ \frac{dt}{dx}=2x,\ dx=\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}dx^2$ verwendet worden.)

f) $\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+5}dx = \frac{1}{3}\int \frac{d(e^{3x}+5)}{e^{3x}+5} = \frac{1}{3}\ln(e^{3x}+5) + C$

(Dabei ist die Substitution $t=e^{3x}+5,\ \frac{dt}{dx}=3e^{3x},\ e^{3x}dx=\frac{1}{3}dt$ verwendet worden.)

g) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^2 x+3}}dx = \int \frac{d\sin x}{\sqrt{\sin^2 x+3}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+3}} = \int \frac{dt}{\sqrt{3}\sqrt{\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2+1}} = \int \frac{du}{\sqrt{u^2+1}}$

$$= \ln(u+\sqrt{u^2+1})+C = \ln\left(\frac{t}{\sqrt{3}}+\sqrt{\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\right)+C = \ln\frac{t+\sqrt{t^2+3}}{\sqrt{3}}+C$$

$$= \ln(t+\sqrt{t^2+3})-\ln\sqrt{3}+C = \ln(t+\sqrt{t^2+3})+D = \ln(\sin x+\sqrt{\sin^2 x+3})+D$$

(Dabei sind die Substitutionen $t=\sin x$, $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\cos x$, $\cos x\,\mathrm{d}x=\mathrm{d}t$ und $u=\frac{t}{\sqrt{3}}$, $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{3}}=\mathrm{d}u$ verwendet worden.)

h) $$\int \mathrm{e}^{x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}(5x^4+4x^3+3x^2+2x+1)\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^{x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}\mathrm{d}(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$$

$$= \mathrm{e}^{x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}+C$$

(Dabei ist die Substitution $t=x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$, $\mathrm{d}t=(5x^4+4x^3+3x^2+2x+1)\,\mathrm{d}x$ verwendet worden.)

i) $$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}\mathrm{d}x = \int \frac{\tan^3 x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int \tan^3 x\,\mathrm{d}\tan x = \frac{1}{4}\tan^4 x+C$$

(Dabei ist die Substitution $t=\tan x$, $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\cos^2 x}$, $\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}=\mathrm{d}t=\mathrm{d}\tan x$ verwendet worden.)

oder $$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x\,\sin x\,\mathrm{d}x}{\cos^5 x} = -\int \frac{(1-\cos^2 x)\,\mathrm{d}\cos x}{\cos^5 x} = -\int(\cos^{-5}x-\cos^{-3}x)\,\mathrm{d}\cos x$$

$$= \frac{1}{4\cos^4 x}-\frac{1}{2\cos^2 x}+D = \frac{1-2\cos^2 x}{4\cos^4 x}+D$$

$$\left(= \frac{1-2\cos^2 x+\cos^4 x}{4\cos^4 x}+C = \frac{\sin^4 x}{4\cos^4 x}+C = \frac{1}{4}\tan^4 x+C\right)$$

(Dabei ist die Substitution $t=\cos x$, $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=-\sin x$, $\sin x\,\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t=-\mathrm{d}\cos x$ verwendet worden.)