Aufgabe 13.1

Für die Produktion von $0 \le x \le 2000$ Einheiten einer Ware laute die Grenzkostenfunktion $K'(x) = 5 - 0.002x$. Bei der Produktion von 1000 Einheiten entstehen Kosten in Höhe von 5500 Geldeinheiten. Wie lautet die Gesamtkostenfunktion und die Durchschnittskostenfunktion? Berechnen Sie die Werte dieser Funktionen für $x = 1900$!

Lösung:

vgl. Aufgabe 12.22,
dort waren Gesamtkosten $K(x)$ gegeben, gesucht Grenzkosten $K'(x)$
jetzt Grenzkosten $K'(x)$ gegeben, gesucht Gesamtkosten $K(x)$

Unbestimmtes Integral (Stammfunktion) : $\left.\begin{array}{r} F'(x) = f(x) \\ (F(x)+C)' = f(x) \end{array}\right\} \Longrightarrow \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$

Integrationsregeln analog Differenziationsregeln

$$\int (u \pm v)\,\mathrm{d}x = \int u\,\mathrm{d}x \pm \int v\,\mathrm{d}x, \quad \int cu\,\mathrm{d}x = c\int u\,\mathrm{d}x$$

Produktregel $\longrightarrow$ partielle Integration

$$\int uv'\,\mathrm{d}x = uv - \int u'v\,\mathrm{d}x$$

Kettenregel $\longrightarrow$ Integration durch Substitution

$$x = x(t), \; f(x) = \tilde{f}(t),$$

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \tilde{f}(t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int \tilde{f}(t)\,x'(t)\,\mathrm{d}t$$

bzw. falls $f(x) = g(t(x))\,t'(x)$:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int g(t(x))\,t'(x)\,\mathrm{d}x = \int g(t)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \int g(t)\,\mathrm{d}t$$

Grundintegrale

$$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

(d.h. auch $\int \mathrm{d}x = \int x^0 \mathrm{d}x = x + C$),

$$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$$

$$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$$

$$\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan x + C$$

Merkstoff zur unbestimmten Integration

$$K(x) = \int K'(x)\,\mathrm{d}x = \int (5 - 0.002x)\,\mathrm{d}x = 5\int \mathrm{d}x - 0.002\int x\,\mathrm{d}x = 5x - 0.002\frac{x^2}{2} + C = 5x - 0.001x^2 + C$$

Zur Bestimmung von C ist eine zusätzliche Angabe erforderlich. (Aus den Grenzkosten können die Anfangsinvestitionskosten nicht ermittelt werden.)

$K(1000) = 5000 - 1000 + C = 5500, \quad C = 1500,$ also

Gesamtkosten	$K(x) = 1500 + 5x - 0.001x^2,$	$K(1900) = 7390,$
Durchschnittskosten	$\dfrac{K(x)}{x} = \dfrac{1500}{x} + 5 - 0.001x,$	$\dfrac{K(1900)}{1900} = 3.889,$
Grenzkosten	$K'(x) = 5 - 0.002x,$	$K'(1900) = 1.2,$

wie aus Aufgabe 12.22 bekannt.