Aufgabe 12.186

Ein Unternehmen setzt ein Produkt zum Preis von p pro Stück ab und erzielt damit einen Umsatz (Erlös) von $U(p)=\dfrac{p}{ap+b}$ $(a,b>0)$. Der Preis kann auch negativ sein (sinnvoll z.B., wenn das Produkt sonst noch kostenaufwändiger entsorgt werden müsste), die abgesetzte Stückzahl $A(p)$ darf aber nicht negativ werden (vgl. Aufgabe 12.15).

a) Zerlegen Sie die Funktion $U(p)$ in ein Polynom und eine echt gebrochen-rationale Funktion!
b) Wie ist der Definitionsbereich von $U(p)$ zu wählen, damit der Absatz wie gefordert nicht negativ wird?
c) Wie verhält sich der Umsatz für $p\to\infty$?
d) Untersuchen Sie die Funktion $U(p)$ auf Monotonie und Extremwerte und bestimmen Sie ihren Wertebereich!
e) Ist $U(p)$ invertierbar? Geben Sie ggf. die Umkehrfunktion sowie ihren Definitions- und Wertebereich an!
f) Entwickeln Sie $U(p)$ an der Stelle $p_0=0$ nach der Taylorschen Formel bis zum quadratischen Glied!

Lösung:

a) $U(p)=\dfrac{p}{ap+b}=\dfrac{1}{a}\,\dfrac{ap}{ap+b}=\dfrac{1}{a}\,\dfrac{ap+b}{ap+b}-\dfrac{1}{a}\,\dfrac{b}{ap+b}=\underbrace{\dfrac{1}{a}}_{\text{Polyn.}}-\underbrace{\dfrac{b/a}{ap+b}}_{\text{echt gebr.-rat. Fkt.}}$

Das Ergebnis erhält man auch sofort durch Polynomdivision.

b) Es gilt $U(p)=A(p)\cdot p$ und daher (für $p\neq 0$) $A(p)=\dfrac{1}{ap+b}$ (vgl. Aufgabe 12.15).

Damit $A(p)$ nicht negativ wird, muss $ap+b>0$, d.h. $p>-b/a$ sein. Für $ap+b=0$, d.h. für $p=-b/a$, ist $A(p)$ nach dieser Vorschrift ohnehin nicht definiert. Folglich gilt $\mathrm{DB}(U)=\left(-\dfrac{b}{a},\infty\right)$.

c) $\displaystyle\lim_{p\to\infty}\frac{p}{ap+b}=\lim_{p\to\infty}\frac{p}{p(a+\frac{b}{p})}=\lim_{p\to\infty}\frac{1}{a+\frac{b}{p}}=\underline{\underline{\frac{1}{a}}}$

oder l'Hospital: $\displaystyle\lim_{p\to\infty}\frac{p}{ap+b}=\lim_{p\to\infty}\frac{1}{a}=\underline{\underline{\frac{1}{a}}}$

d) $U'(p)=\dfrac{ap+b-ap}{(ap+b)^2}=\dfrac{b}{(ap+b)^2}>0$ für alle p aus dem Definitionsbereich, also ist $U(p)$ überall streng monoton wachsend und hat keine Extremwerte.

Wegen $\displaystyle\lim_{p\to-\frac{b}{a}+0}\frac{p}{ap+b}=\frac{-\frac{b}{a}}{+0}=-\infty$ und $\displaystyle\lim_{p\to\infty}\frac{p}{ap+b}=\frac{1}{a}$ ergibt sich $\mathrm{WB}(U)=\left(-\infty,\dfrac{1}{a}\right)$.

e) Da die Funktion $U(p)$ überall monoton wachsend ist, ist sie eineindeutig und daher invertierbar.

$U=\dfrac{p}{ap+b},\quad Uap+Ub=p,\quad Ub=p(1-Ua),\quad \underline{\underline{p(U)=\dfrac{bU}{1-aU}}}$

$\mathrm{DB}(p(U))=\left(-\infty,\dfrac{1}{a}\right),\quad \mathrm{WB}(p(U))=\left(-\dfrac{b}{a},\infty\right)$

f) $U(p) = \dfrac{p}{ap+b}$ $\qquad U(0) = 0$

$U'(p) = \dfrac{b}{(ap+b)^2} = b(ap+b)^{-2}$ $\qquad U'(0) = \dfrac{1}{b}$

$U''(p) = -2ab(ap+b)^{-3} = -\dfrac{2ab}{(ap+b)^3}$ $\qquad U''(0) = -\dfrac{2a}{b^2}$

$$\underline{\underline{P_2(p) = \frac{1}{b}p - \frac{a}{b^2}p^2}}$$