Aufgabe 12.185

Die Anzahl z der Fahrzeuge, die eine bestimmte Straße stündlich passieren können, lasse sich aus der mittleren Geschwindigkeit v in m/s bei einer mittleren Fahrzeuglänge von 4 m nach folgender Formel berechnen:

$$z(v) = 1000\frac{v}{4+\frac{v}{4}+\frac{v^2}{12}}.$$

a) Die Straße werde durchschnittlich mit $v_0 = 12\,\mathrm{m/s}$ passiert. Approximieren Sie z um v_0 durch ein Taylorpolynom 2. Grades!

b) Welche Schlussfolgerungen lassen sich daraus für die Durchlassfähigkeit der Straße ziehen, wenn sich die Durchschnittsgeschwindigkeit gegenüber v_0 erhöht?

c) Bei welcher Durchschnittsgeschwindigkeit in km/h ist die Durchlassfähigkeit der Straße am größten?

Lösung:

a) $$z'(v) = 1000\frac{4+\frac{v}{4}+\frac{v^2}{12} - v\left(\frac{1}{4}+\frac{v}{6}\right)}{\left(4+\frac{v}{4}+\frac{v^2}{12}\right)^2} = 1000\frac{4-\frac{v^2}{12}}{\left(4+\frac{v}{4}+\frac{v^2}{12}\right)^2},$$

$$z''(v) = 1000\frac{-\frac{v}{6}\left(4+\frac{v}{4}+\frac{v^2}{12}\right)^2 - \left(4-\frac{v^2}{12}\right)2\left(4+\frac{v}{4}+\frac{v^2}{12}\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{v}{6}\right)}{\left(4+\frac{v}{4}+\frac{v^2}{12}\right)^4}$$
$$= 1000\frac{-\frac{v}{6}\left(4+\frac{v}{4}+\frac{v^2}{12}\right) - \left(4-\frac{v^2}{12}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{v}{3}\right)}{\left(4+\frac{v}{4}+\frac{v^2}{12}\right)^3}$$
$$= 1000\frac{-\frac{2v}{3}-\frac{v^2}{24}-\frac{v^3}{72}-2-\frac{4v}{3}+\frac{v^2}{24}+\frac{v^3}{36}}{\left(4+\frac{v}{4}+\frac{v^2}{12}\right)^3} = 1000\frac{-2-2v+\frac{v^3}{72}}{\left(4+\frac{v}{4}+\frac{v^2}{12}\right)^3},$$

$$z(12) = 1000\frac{12}{19},\quad z'(12) = 1000\left(-\frac{8}{361}\right),\quad z''(12) = 1000\left(-\frac{2}{6859}\right),$$

$$P_2(v) = 1000\left(\frac{12}{19} - \frac{8}{361}(v-12) - \frac{1}{6859}(v-12)^2\right)$$
$$\approx 631.57895 - 22.16066(v-12) - 0.14579(v-12)^2$$

b) Da das lineare Glied einen negativen Koeffizienten hat, führt eine Erhöhung von v gegenüber $v_0 = 12$ zu einer Verringerung der Durchlassfähigkeit. (Die Funktion $z(v)$ ist dort monoton fallend.)

c) $z'(v) = 0$ für $4-\frac{v^2}{12} = 0,\ 4 = \frac{v^2}{12},\ v^2 = 48,\ v = \pm\sqrt{48},$

dabei kommt nur $v = \sqrt{48}$ als Lösung in Frage, $z'(v)$ hat gleiches Vorzeichen wie $4-\frac{v^2}{12}$,

$$4-\frac{v^2}{12}\left\{\begin{array}{ll} >0, \quad v<\sqrt{48}: & \text{monoton wachsend} \\ <0, \quad v>\sqrt{48}: & \text{monoton fallend}\end{array}\right\} \Longrightarrow \text{Maximum bei } v = \sqrt{48},$$

Maximum bei $v = \sqrt{48}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \sqrt{48}\frac{\mathrm{km}}{1000}\frac{3600}{\mathrm{h}} \approx 24.94\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}.$