Aufgabe 12.184

Ein Körper werde aus einer Höhe von 2 m über der Erdoberfläche mit einer Geschwindigkeit von 9.81 m/s senkrecht nach oben geworfen. Der Luftwiderstand wird nicht berücksichtigt.

a) Nach welcher Zeit erreicht der Körper seine größte Höhe, wieder die Höhe von 2 m bzw. den Erdboden?
b) Mit welcher Geschwindigkeit prallt der Körper auf den Erdboden auf?
c) Geben Sie die Taylorentwicklungen der Höhe nach der Zeit im Startzeitpunkt sowie in den drei unter a) genannten Zeitpunkten an!

Lösung:

a) Hier werden zwei Bewegungen überlagert: Der Wurf nach oben mit $s(t)=v_0 t=9.81\,t$ und der Fall nach unten mit $s(t)=\frac{g}{2}t^2=\frac{9.81}{2}t^2$ (Weg in m, Zeit in s, v_0 in $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, g in $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$). Also gilt

$$h(t)=2+9.81\,t-4.905\,t^2,\quad v(t)=\dot{h}(t)=9.81-9.81\,t.$$

Die größte Höhe wird für $v(t)=0$, also für $t=1$ erreicht. (Das ist schon deshalb klar, weil eine Geschwindigkeit von 9.81 m/s bei einer konstanten Verzögerung von pro Sekunde 9.81 m/s nach 1 s auf 0 gefallen ist.)

Die Höhe 2 m wird für $2=2+9.81\,t-4.905\,t^2$, d.h. $4.905\,t\,(2-t)=0$, also neben dem Startzeitpunkt $t=0$ für $t=2$ erreicht.

Der Erdboden wird für $2+9.81\,t-4.905\,t^2=0$, d.h. $t^2-2t-\frac{2}{4.905}=0$ erreicht, damit ergibt sich $t=1\pm\sqrt{1+\frac{2}{4.905}}\approx\begin{cases}\;\;\,2.1865 & \\ -0.1865 & \text{(scheidet aus).}\end{cases}$

Also wird die größte Höhe nach 1 s, die Höhe 2 m wieder nach 2 s und der Erdboden nach 2.1865 s erreicht.

b) $v(2.1865)\approx-11.6394$, also erfolgt der Aufprall mit einer Geschwindigkeit von 11.6394 m/s.

c) Es gilt $h(0)=2,\ h(1)=6.905,\ h(2)=2,\ h(2.1865)=0,$

$\dot{h}(0)=v(0)=9.81,\ \dot{h}(1)=v(1)=0,\ \dot{h}(2)=v(2)=-9.81,\ \dot{h}(2.1865)=v(2.1865)=11.6394,$

$\ddot{h}(t)=-g=-9.81$ konstant.

Entwicklung an der Stelle $t_0=0$: $h(t)=2+9.81\,t-4.905\,t^2$

Entwicklung an der Stelle $t_0=1$: $h(t)=6.905-4.905\,(t-1)^2$

Entwicklung an der Stelle $t_0=2$: $h(t)=2-9.81(t-2)-4.905\,(t-2)^2$

Entwicklung an der Stelle $t_0=2.1865$: $h(t)=-11.6394(t-2.1865)-4.905\,(t-2.1865)^2$
(gilt natürlich nur bis zum Aufprallzeitpunkt)

Da es sich um eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung handelt, sind die Taylorentwicklungen exakt und beschreiben alle die gleiche Funktion.