Aufgabe 12.175

Sei $f(x) = \mathrm{e}^{\sin x} - ax$.

a) Entwickeln Sie $f(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ nach der Taylorschen Formel bis zum kubischen Glied! (Das Restglied muss nicht angegeben werden.)

b) Wie muss man den Parameter a wählen, damit $f(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ einen Extremwert hat? Argumentieren Sie dabei mithilfe der Taylorentwicklung!

Lösung:

a)
$$\begin{aligned} f(x) &= \mathrm{e}^{\sin x} - ax & f(0) &= 1 \\ f'(x) &= \cos x\, \mathrm{e}^{\sin x} - a & f'(0) &= 1-a \\ f''(x) &= -\sin x\, \mathrm{e}^{\sin x} + \cos^2 x\, \mathrm{e}^{\sin x} & f''(0) &= 1 \\ f'''(x) &= -\cos x\, \mathrm{e}^{\sin x} - \sin x \cos x\, \mathrm{e}^{\sin x} - 2\cos x \sin x\, \mathrm{e}^{\sin x} + \cos^3 x\, \mathrm{e}^{\sin x} & f'''(0) &= 0 \end{aligned}$$

$$T_3(x) = 1 + (1-a)x + \frac{x^2}{2}$$

b) Es gilt $f(x) = 1 + (1-a)x + \frac{x^2}{2} + R_3(x)$, $f(0) = 1$.

Ist $a \neq 1$, so wechselt $(1-a)x$ für $x = 0$ das Vorzeichen. $\Longrightarrow$ Kein Extremwert bei $x_0 = 0$.

Ein Extremwert kann also nur vorliegen, wenn $a = 1$ gilt. Dann ist

$f(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + R_3(x) \geq 1 = f(0)$ in einer Umgebung von $x_0 = 0$, d.h. für $x_0 = 0$ liegt ein Minimum vor.