Aufgabe 12.174

Bei den Aufgaben 18.135, 11.62, 14.19 und 12.174 soll die Funktion $f(t) = 2\sin\frac{\pi}{6}t$ auf verschiedene Weise approximiert bzw. interpoliert werden.

a) Approximieren Sie $f(t)$ durch Taylorentwicklung an der Stelle $t_0 = 1$ durch eine Parabel. Welchen Wert hat diese an der Stelle $t = 3$?

b) Konvergiert die durch Taylorentwicklung an der Stelle $t_0 = 1$ entstehende Taylorreihe für $t = 3$, wenn ja, gegen welchen Wert?

Lösung:

a)
$$\begin{aligned} f(t) &= 2\sin\frac{\pi}{6}t & \qquad f(1) &= 2\sin\frac{\pi}{6} &&= 1 \\ f'(t) &= \frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}t & f'(1) &= \frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6} &&= \frac{\pi}{6}\sqrt{3} \\ f''(t) &= -\frac{\pi^2}{18}\sin\frac{\pi}{6}t & f''(1) &= -\frac{\pi^2}{18}\sin\frac{\pi}{6} &&= -\frac{\pi^2}{36} \end{aligned}$$

$$P_2(t) = 1 + \frac{\pi}{6}\sqrt{3}(t-1) - \frac{\pi^2}{72}(t-1)^2$$

$$P_2(3) = 1 + \frac{\pi}{6}\sqrt{3}\cdot 2 - \frac{\pi^2}{72}4 = 1 + \frac{\pi}{\sqrt{3}} - \frac{\pi^2}{18} \approx 2.27 \text{ gegenüber } f(3) = 2$$

b) $R_n(3) = \dfrac{f^{(n+1)}(\tau)}{(n+1)!}(3-1)^{n+1}, \quad 1 < \tau < 3,$

$$\begin{aligned} f(t) &= 2\sin\frac{\pi}{6}t \\ f'(t) &= 2\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6}t \\ f''(t) &= -2\left(\frac{\pi}{6}\right)^2\sin\frac{\pi}{6}t \\ f'''(t) &= -2\left(\frac{\pi}{6}\right)^3\cos\frac{\pi}{6}t \\ f^{(4)}(t) &= 2\left(\frac{\pi}{6}\right)^4\sin\frac{\pi}{6}t \end{aligned}$$

usw.

Da die Winkelfunktionen durch 1 beschränkt sind, gilt $\left|f^{(n+1)}(\tau)\right| \le 2\left(\frac{\pi}{6}\right)^{n+1}$ und daher

$$|R_n(3)| \le \frac{2\left(\frac{\pi}{6}\right)^{n+1}}{(n+1)!}2^{n+1} = 2\frac{\left(\frac{\pi}{3}\right)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Da der Zähler in jedem Schritt mit dem konstanten Faktor $\pi/3$, der Nenner aber mit $n+1$ multipliziert wird, gilt $\lim\limits_{n\to\infty}|R_n(3)| = 0$, so dass die Taylorreihe gegen $f(3) = 2$ konvergiert.