Aufgabe 12.173

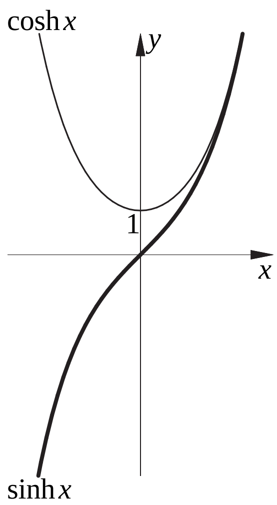
Durch die Beziehungen $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ und $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ werden die Funktionen Sinus Hyperbolicus und Kosinus Hyperbolicus definiert.

a) Untersuchen Sie die beiden Funktionen auf Monotonie, Extremwerte und Krümmungsverhalten!
b) Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = \sinh x$ im Punkt $x_0 = 0$ nach der Taylorschen Formel!
c) Wie lauten die Taylorpolynome dritten und vierten Grades $T_3(x,0)$ und $T_4(x,0)$ für $\sinh x$?
d) Geben Sie die jeweiligen Lagrangeschen Restglieder an!
e) Zeigen Sie mithilfe des Lagrangeschen Restgliedes, dass für $|x| \le 1$ die Abschätzung $|T_4(x,0) - \sinh x| < 0.013$ gilt!
f) Wie groß ist der Fehler bei Verwendung des Taylorpolynoms vierten Grades zur Berechnung von $\sinh 1$ tatsächlich?
g) Beweisen Sie, dass die Taylorreihe für $\sinh x$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ für alle x konvergiert!

Lösung:

a) $$(\sinh x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \cosh x,$$

$$(\cosh x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \sinh x$$



Offensichtlich gilt immer $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} > 0$, während $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ für positive x positiv, für $x = 0$ gleich 0 und für negative x negativ ist.

Für $f(x) = \sinh x$ gilt somit:

$f'(x) = \cosh x = 0 \implies$ überall streng mon. wachsend, kein Extremwert

$$f''(x) = \sinh x = \begin{cases} < 0, & x < 0: \quad \text{konkav} \\ = 0, & x = 0 \\ > 0, & x > 0: \quad \text{konvex} \end{cases} \implies \text{Wendepunkt}$$

Für $g(x) = \cosh x$ gilt:

$$g'(x) = \sinh x = \begin{cases} < 0, & x < 0: \quad \text{monoton fallend} \\ = 0, & x = 0 \\ > 0, & x > 0: \quad \text{monoton wachsend} \end{cases} \implies \text{Minimum bei } \cosh 0 = 1$$

$g''(x) = \cosh x = 0 \implies$ überall konvex

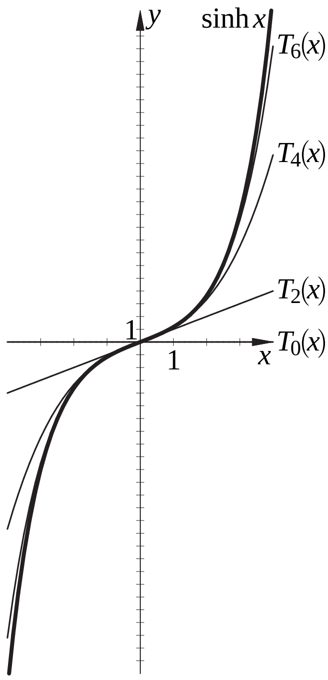
b)
$$\begin{aligned} f(x) &= \sinh x & f(0) &= 0 \\ f'(x) &= \cosh x & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= \sinh x & f''(0) &= 0 \\ f'''(x) &= \cosh x & f'''(0) &= 1 \end{aligned}$$
usw. alternierend

$$f(x) = \sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

(Diese Reihe konvergiert für alle x gegen $\sinh x$ (siehe g), deshalb darf das Gleichheitszeichen gesetzt werden.)

c) Wegen $f^{(4)}(0) = 0$ gilt $T_3(x,0) = T_4(x,0) = x + \frac{x^3}{6}$.

d) $R_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} x^4 = \frac{\sinh \xi}{24} x^4$, $R_4(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} x^5 = \frac{\cosh \xi}{120} x^5$, ξ zwischen 0 und x



e) $|T_4(x,0) - \sinh x| = |-R_4(x,0)| = |R_4(x,0)| = \dfrac{\cosh\xi}{120}|x|^5,$
ξ zwischen 0 und x.

Wegen $|x| \le 1$ ist offensichtlich auch $|\xi| < 1$. Da der Kosinus Hyperbolicus eine gerade Funktion ist und für $x > 0$ monoton wächst, folgt $\cosh\xi < \cosh 1 = \dfrac{e + \frac{1}{e}}{2}$. Mit $|x| \le 1$ erhält man schließlich

$|T_4(x,0) - \sinh x| = \dfrac{\cosh\xi}{120}|x|^5 < \dfrac{e + \frac{1}{e}}{240} \approx 0.0129.$

Die gegebene Abschätzung ist also tatsächlich richtig.

f) $\sinh 1 = \dfrac{e + \frac{1}{e}}{2} \approx 1.17520, \quad T_4(x,0) = 1 + \dfrac{1}{6} = \dfrac{7}{6} \approx 1.166667,$

$T_4(x,0) - \sinh 1 \approx 0.00853.$

Der tatsächliche Fehler ist also deutlich kleiner. Er kann mit dem Restglied nicht besser abgeschätzt werden, da der tatsächliche Zwischenwert ξ nicht bekannt ist.

g) Es gilt $\sinh x = T_{2n}(x,0) + R_{2n}(x,0)$ mit $R_{2n}(x,0) = \dfrac{f^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!}x^{2n+1} = \dfrac{\cosh\xi}{(2n+1)!}x^{2n+1}$,
ξ zwischen 0 und x.

Da der Kosinus Hyperbolicus sein Minimum für $x = 0$ hat und ansonsten monoton ist, glit $\cosh\xi < \cosh x$. Folglich ist

$|R_{2n}(x,0)| \le \dfrac{\cosh x}{(2n+1)!}|x|^{2n+1} = \cosh x \dfrac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cosh x \dfrac{|x|}{1}\dfrac{|x|}{2}\dfrac{|x|}{3}\cdots\dfrac{|x|}{2n+1}.$

Für jedes x ist irgendwann $\dfrac{|x|}{2n+1} < 1$, vergrößert man von dort aus das n, sind alle weiteren Faktoren noch kleiner, so dass $R_{2n}(x,0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ gilt.

Damit ist $T_{2n}(x,0) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \xrightarrow[n\to\infty]{} \sinh x$, d.h. $\sinh x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ für jedes x.

(Die Konvergenz ist allerdings nicht gleichmäßig, je größer $|x|$ ist, desto langsamer ist die Konvergenz.)